

## CAPITOLO VIII

## La trasformazione conforme

## § 1. - Generalità.

In generale si definisce trasformazione o rappresentazione od ancora applicazione, una qualsiasi corrispondenza biunivoca tra due piani complessi  $w$  e  $z$ . Gli insiemi di punti che si corrispondono si dicono l'uno immagine dell'altro.

Invece abbiamo una rappresentazione o applicazione o trasformazione conforme quando due curve intersecanti nel primo piano, rappresentate sul secondo, mantengono, tra di esse, invariato l'angolo in ampiezza e verso.

Si può dimostrare il seguente teorema: se  $f(z)$  è analitica in una regione  $\mathfrak{R}$  e presenta in questa regione una derivata diversa da zero, ( $f'(z) \neq 0$ ) allora la rappresentazione risulta conforme un tutti i punti di  $\mathfrak{R}$ . I punti in cui  $f'(z) = 0$  sono detti punti critici.

Piccole figure in un piano, mantengono gli angoli e quindi la forma, se vengono rappresentate nell'altro, pertanto abbiamo l'aggettivo *conforme*.

## § 2. - Esempi di rappresentazione conforme.

Consideriamo la seguente rappresentazione:

$$w = z^2. \quad (1)$$

Studiamola prima in coordinate cartesiane:

il piano  $w$  di coordinate  $\varphi$  e  $\psi$  viene rappresentato sul piano  $z$  di coordinate  $x$  ed  $y$ .

La (1) allora può essere scritta nel modo seguente:

$$\varphi + i\psi = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

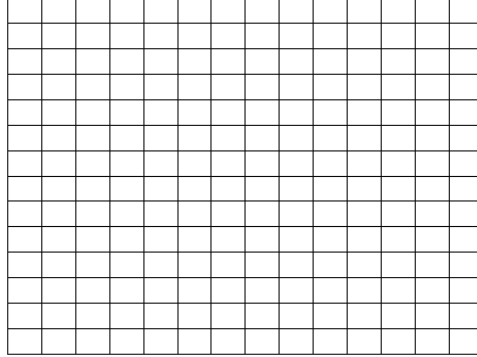


Figura 1: Il reticolo del piano  $w$  che può rappresentare un moto uniforme.

dato che  $i^2 = -1$ .

Confrontando ora le parti immaginarie di ambo i membri della precedente Otteniamo:

$$\psi = 2xy,$$

per cui le rette parallele all'asse delle ascisse del piano  $w$  vengono rappresentate come iperboli nel piano  $z$ :  $y = \psi/2x$ .

Confrontando invece le parti reali abbiamo:

$$\varphi = x^2 - y^2.$$

Pertanto le rette parallele all'asse delle ordinate di  $w$  vengono rappresentate nel piano  $z$ , nelle curve:

$$y = \sqrt{x^2 - \varphi}.$$

Nel caso particolare dell'asse delle ordinate ( $\varphi = 0$ ) abbiamo  $x = y$ , cioè la bisettrice del piano  $z$ . Notiamo inoltre che gli angoli retti, tra

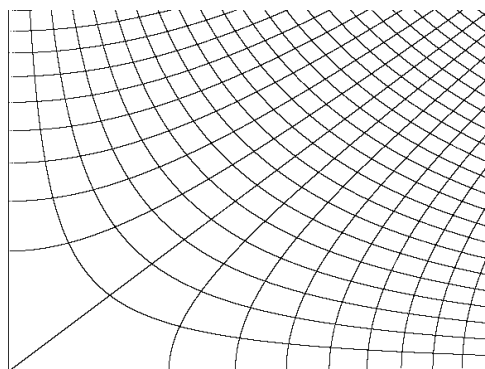


Figura 2: Il reticolo sul piano  $z$  ottenuto tramite la trasformazione.

le due famiglie di curve, del piano  $w$  si mantengono tali anche nel piano  $z$  come appunto deve essere in una rappresentazione conforme.

Intuitivamente potremmo pensare ad una membrana infinitamente elastica tesa su due assi incernierati. Nel piano  $w$  i due assi formano un angolo piatto e possiamo disegnare sulla membrana stessa un reticolo con rette ortogonali che formano una serie di quadrati contigui. Se, a questo punto, ruotiamo un asse rispetto all'altro, formando un angolo retto, abbiamo il piano  $z$ . I quadrati si deformano ma le curve rimangono tra loro ortogonali.

Il lettore avrà, a questo punto, riconosciuto due reticoli idrodinamici, il primo, cioè il piano  $w$ , rappresenta un moto uniforme, mentre l'altro, sul piano trasformato  $z$ , un flusso che lambisce due pareti ad angolo retto.

Quindi la trasformazione conforme si presenta come un metodo molto efficace per determinare un fenomeno idrodinamico partendo da un altro noto come ad esempio il moto uniforme.

Il calcolo precedente è stato eseguito agevolmente in coordinate cartesiane per la semplicità dell'esponente della (1), però, nel caso generale, è opportuno usare le coordinate polari.

Infatti nel piano  $w$  possiamo scrivere, un coordinate polari:

$$w = re^{i\theta},$$

dove:

$$r = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2},$$

mentre:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\psi}{\varphi}.$$

La trasformazione inversa sarà allora:

$$z = w^{1/2},$$

pertanto avremo:

$$z = r^{1/2} e^{i\theta/2}.$$

Inoltre, per la formula di Euler:

$$z = r^{1/2} \cos \theta/2 + ir^{1/2} \sin \theta/2 = x + iy.$$

Quindi il modulo del nuovo piano risulta pari alla radice quadrata di quello originario, mentre l'anomalia si riduce alla metà. In definitiva possiamo eseguire la trasformazione, punto per punto, dai piani  $w$  a  $z$  trovando, di nuovo, lo stesso risultato visto in coordinate cartesiane.

§ 3. - La trasformazione per qualsiasi angolo.

Per un angolo  $\alpha = \pi/n$  si dimostra che la trasformazione risulta essere:

$$w = z^n. \tag{2}$$

Infatti nel caso visto in precedenza avevamo  $\alpha = \pi/2$  e quindi  $n = 2$ . Usando, per semplicità le coordinate polari possiamo scrivere la trasformazione inversa:

$$z = w^{1/n} = r^{1/n} e^{i\theta/n} \quad (3)$$

dove al solito:

$$r = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2},$$

mentre:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\psi}{\varphi}.$$

La trasformazione precedente può quindi essere scritta nel modo seguente:

$$x + iy = r^{1/n} \cos \frac{\theta}{n} + ir^{1/n} \sin \frac{\theta}{n},$$

da cui abbiamo:

$$x = r^{1/n} \cos \frac{\theta}{n}$$

$$y = r^{1/n} \sin \frac{\theta}{n}.$$

Quindi, per punti, possiamo costruirci la trasformazione per qualsiasi angolo. Per esempio con  $\alpha = 3/2\pi$  avremmo  $n = 2/3$  e per le precedenti:

$$x = r^{3/2} \cos \frac{3}{2}\theta$$

$$y = r^{3/2} \sin \frac{3}{2}\theta,$$

che rappresenta il flusso attorno ad uno spigolo, con le linee di corrente che si presentano più vicine al vertice dove quindi abbiamo una velocità maggiore. Notiamo infatti che d'estate il gatto riposa agli

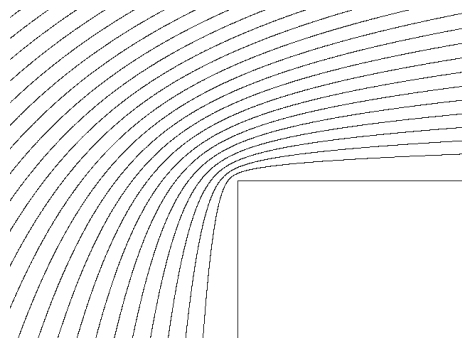


Figura 3: Il flusso attorno ad uno spigolo.

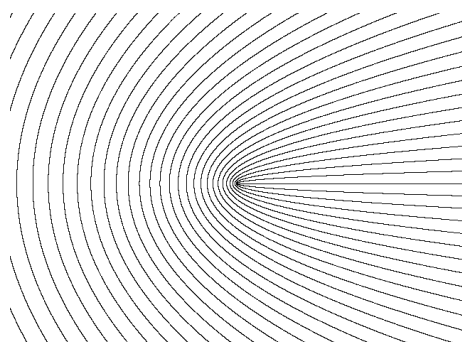


Figura 4: Il flusso che gira attorno ad una piastra.

angoli delle case, proprio dove le linee di flusso si infittiscono, per sentire più refrigerio.

#### § 4. - Alcune semplici trasformazioni.

Tutto ciò che abbiamo visto nel capitolo delle singolarità idrodinamiche può essere riconsiderato sotto l'aspetto della trasformazione conforme.

Infatti la relazione:

$$w = Uz,$$

che rappresenta un moto uniforme, può essere interpretata come una semplice trasformazione tra i piani  $w$  e  $z$ .

Anche la relazione:

$$w = m \ln z,$$

che, per  $m$  reale, pari a  $Q/2\pi$ , risulta una sorgente o pozzo, mentre per  $m = -i\Gamma/2\pi$  un vortice. La precedente può essere vista come una trasformazione dal piano  $w$ , dove esiste il moto uniforme, al piano  $z$  dove abbiamo una sorgente od un vortice.

Però la rappresentazione più interessante, di cui ci occuperemo maggiormente nel prossimo paragrafo, è la seguente:

$$w = z + \frac{a^2}{z},$$

cioè un flusso uniforme, con velocità unitaria, che investe un cilindro di raggio  $a$ .

§ 5. - Le trasformazioni del cerchio.

La trasformazione:

$$w = z + \frac{a^2}{z}, \quad (4)$$

ci permette di ottenere il reticolo idrodinamico di un cilindro investito da una corrente, trasformando il piano uniforme  $w$ . Questa rappresentazione la possiamo eseguire in coordinate polari o cartesiane.

In coordinate polari abbiamo:

$$w = re^{i\theta} + \frac{a^2}{r}e^{-i\theta},$$

ossia:

$$\varphi + i\psi = r \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta + ir \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta,$$

quindi abbiamo:

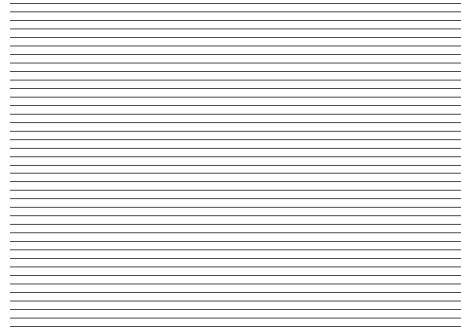


Figura 5: Le linee di flusso sul piano  $w$ .

$$\psi = r \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta,$$

dato che  $r \sin \theta$  non è altro che l'ordinata  $y$ , possiamo ricavarci le coordinate del punto trasformato:

$$y = \frac{\psi}{1 - \frac{a^2}{r^2}}$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Quindi, impostato un valore  $\psi = cost.$  e di  $r$ , possiamo ottenere, per punti, le coordinate  $x, y$  di una linea di corrente sul piano  $z$ .

Ragionando invece in coordinate cartesiane i calcoli si complicano un pò, infatti dobbiamo moltiplicare denominatore e numeratore del secondo termine della (4) per il complesso coniugato  $z^*$ , ottenendo quindi:

$$w = z + \frac{a^2}{zz^*} z^*,$$

ossia:



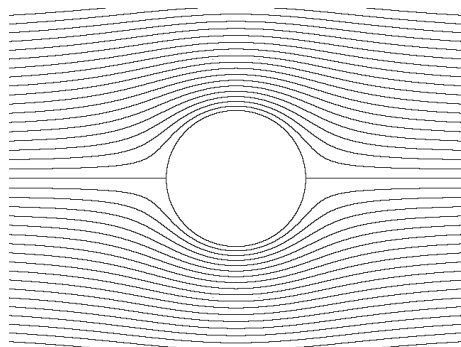


Figura 6: L'applicazione rappresenta il moto attorno ad un cilindro.

$$\varphi + i\psi = x + iy + \frac{a^2}{x^2 + y^2}(x - iy).$$

Considerando adesso soltanto la parte immaginaria otteniamo:

$$\psi(x^2 + y^2) = x^2y + y^3 - a^2y,$$

ed in definitiva:

$$x = \sqrt{\frac{y^3 - a^2y - \psi y^2}{\psi - y}}. \quad (5)$$

Con la precedente possiamo quindi rappresentare per punti le linee di flusso imponendo i valori di  $\psi$  e di  $y$ .

§ 6. - Le trasformazioni successive.

a) *flusso parallelo ad una piastra.*

Risulta talvolta opportuno adoperare delle trasformazioni in successione.

Joukowski si accorse per primo che se si applica al flusso attorno ad un cilindro ottenuto, come abbiamo visto dalla:

$$w = z_1 + \frac{a^2}{z_1} \quad (6)$$

di nuovo la stessa trasformazione<sup>1</sup>:

$$z = z_1 + \frac{a^2}{z_1}, \quad (7)$$

per trasformare il piano  $z_1$  in  $z$ , notiamo che i punti di ascissa  $a$  e  $-a$ , vengono rappresentati in  $2a$  e  $-2a$  rispettivamente, mentre i due punti  $ia$  e  $-ia$  si riducono nell'origine<sup>2</sup>. Pertanto il cerchio di raggio  $a$  viene trasformato in un segmento lungo  $4a$  e giacente sull'asse delle ascisse. Le linee di flusso si ottengono dalla (4) tenendo presente che  $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$  abbiamo:

$$x + iy = (x_1 + iy_1) + \frac{a^2}{r_1^2}(x_1 - iy_1),$$

e da questa si ricavano le ascisse e le ordinate delle linee di corrente su piano  $z$ , che sono tutte parallele all'asse delle ascisse.

$$x = x_1 \left( 1 + \frac{a^2}{r_1^2} \right) \quad (8)$$

$$y = y_1 \left( 1 - \frac{a^2}{r_1^2} \right). \quad (9)$$

Si tratta di uno stiramento del piano detto *omotetia*. La nostra membrana elastica viene tirata a tal punto che il cerchio, su di essa disegnato, si trasforma in una retta lunga  $4a$ .

*b) flusso attorno ad un'ellisse.*

Se invece usiamo la successione di trasformazioni passando dal piano  $w$  a  $z$  attraverso  $z_1$ :

<sup>1</sup>per questo la (4) viene chiamata: trasformazione di Joukowski.

<sup>2</sup>infatti se a  $z_1$  viene assegnato il valore  $a$  abbiamo  $a + a = 2a$ , così per le ascisse negative, mentre se consideriamo il punto  $ia$  troviamo  $ia - ia = 0$ , lo stesso per  $-ia$ .



Figura 7: La trasformazione inversa considera il moto parallelo ad una piastra.

$$w = z_1 + \frac{a^2}{z_1}, \quad (10)$$

$$z = z_1 + \frac{b^2}{z_1}, \quad (11)$$

dove  $b < a$ , otteniamo, sul piano  $z$ , un ellisse con l'asse maggiore lungo  $2(a + \frac{b^2}{a})$ .

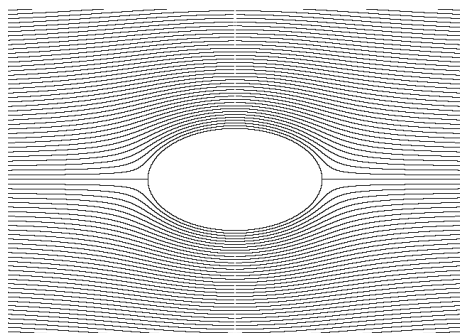


Figura 8: La trasformazione di Joukowski conduce al moto attorno ad un ellisse.

c) *flusso normale ad una piastra.*

Se applichiamo di seguito le seguenti trasformazioni:

$$w = z_1 + \frac{a^2}{z_1}, \quad (12)$$

$$z_2 = -iz_1 \quad (13)$$

$$z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}. \quad (14)$$

La seconda trasformazione può essere scritta:

$$x_2 + iy_2 = y_1 - ix_1,$$

cioè:

$x_2 = y_1$  e  $y_2 = -x_1$ . La terza trasformazione è identica a quella vista al punto precedente:

$$x = x_2 \left( 1 + \frac{a^2}{r_2^2} \right) \quad (15)$$

$$y = y_2 \left( 1 - \frac{a^2}{r_2^2} \right) \quad (16)$$

ma adesso rappresenta un flusso normale ad una piastra larga  $4a$ .

Raddrizzandola di nuovo e tenendo conto solo delle ordinate positive otteniamo il flusso sopra ad una traversa alta  $2a$ .

### § 7. - I profili di Joukowski.

Joukowski inoltre applicò la sua trasformazione dopo aver fatto slittare, nel piano  $z$ , il centro del cerchio, sull'asse delle ascisse verso sinistra, di una quantità prefissata  $m$ .

Applicando ora al cerchio traslato, la trasformazione:

$$w = z + \frac{b^2}{z},$$

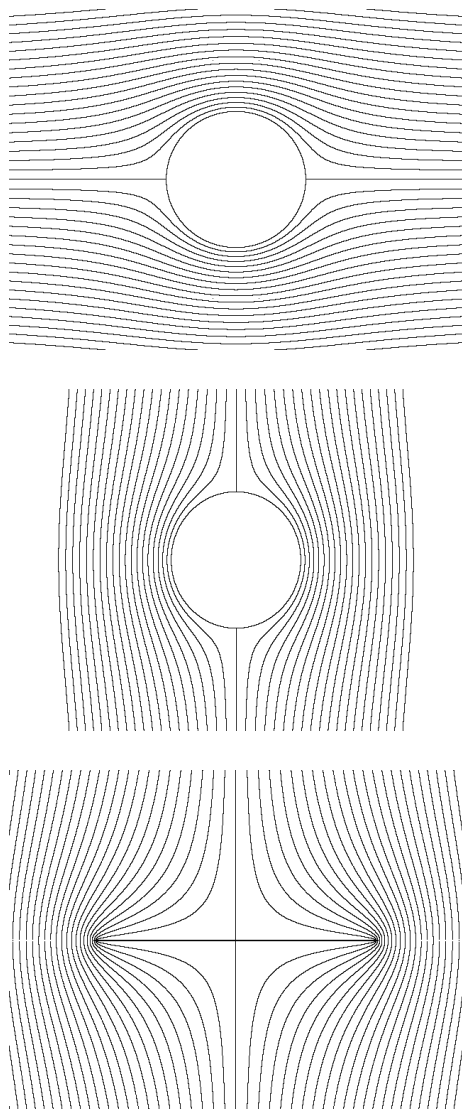


Figura 9: Con le trasformazioni successive è possibile ottenere il flusso normale ad una piastra.

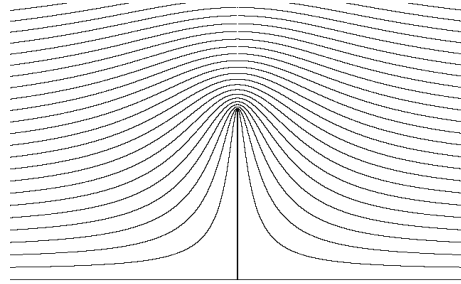


Figura 10: Il flusso sopra una traversa.

dove  $b = a - m$ , si ottiene, nel piano  $w$ , un profilo di tipo *a goccia*. Infatti il punto  $C'$  immagine di  $C$  è un punto critico essendo  $f'(z) = 0^3$ .

I punti critici non si spostano nella trasformazione. Pertanto, la membrana elastica su cui è stato disegnato il cerchio, viene stirata verso sinistra, per la trasformazione di Joukowski, ma il punto  $C$  rimane fissato come da uno spillo, non si può spostare mentre tutti gli altri sono liberi di farlo. Ne consegue un profilo a goccia più o meno affusolato a seconda del valore di  $m$  con una forma evidentemente molto efficace per accompagnare il flussi verso la coda. Anche le linee di corrente attorno al cerchio traslato si trasformano in quelle attorno ad un profilo di Joukowski simmetrico.

Se infine spostiamo il centro del cerchio anche in direzione delle ordinate di una quantità  $n$  otteniamo un profilo asimmetrico come quello delle ali.

Se non abbiamo una circolazione la portanza risulta nulla come si può notare (Fig.15) la distribuzione delle linee di corrente, superiori

---

<sup>3</sup>Infatti:

$$f'(z) = 1 - \frac{b^2}{z^2} = 1 - 1 = 0$$

essendo  $b$  e  $z$  entrambi uguali a  $a - m$ .

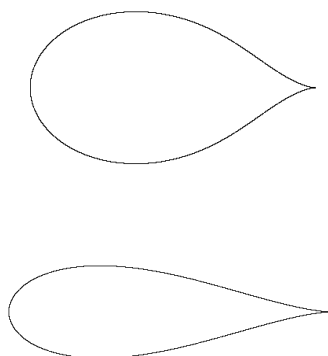


Figura 11: I profili di Joukowski simmetrici per due valori di  $m$ .

ed inferiori, risulta simmetrica ed il punto di ristagno in coda non coincide con lo spigolo di uscita.

#### § 8. - La teoria bidimensionale dell'ala.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che si possono determinare le linee di corrente attorno ad un profilo alare asimmetrico. Però notiamo che esiste una simmetria del campo di moto che, per il teorema del Bernoulli, conduce ad una portanza nulla. Infatti il punto ristagno in coda si trova sull'estradosso dell'ala e ciò provoca la simmetria. Secondo l'ipotesi dello stesso Joukowski per avere un accordo con i dati sperimentali occorre invece che tale punto coincida proprio con lo spigolo di uscita. Per questo occorre che sia applicata una circolazione  $\Gamma$  opportuna.

Inoltre i profili alari si presentano di solito con un angolo  $\alpha$  misurato tra la direzione del flusso e la *corda* dell'ala, cioè della linea che congiunge il *naso* con il bordo d'uscita, detto *angolo d'attacco*.

Per un'ala indefinita e quindi considerando il moto bidimensionale, può essere descritta mediante le seguenti trasformazioni successive:

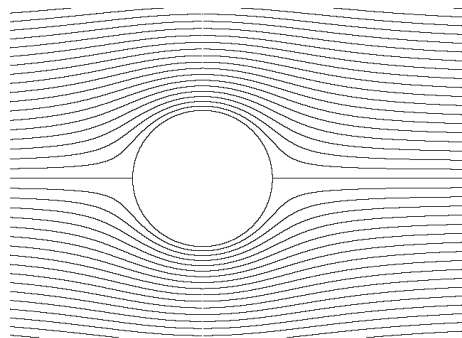


Figura 12: Le linee di flusso attorno al cerchio traslato.

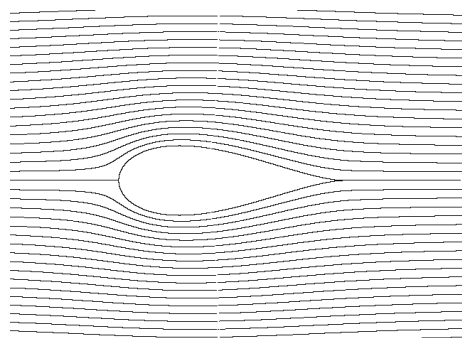


Figura 13: Le linee di corrente attorno al profilo di Joukowski simmetrico.

$$w = U \left( z_1 + \frac{a^2}{z_1} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z_1$$

per ottenere il moto attorno ad un cilindro con circolazione. Successivamente:

$$z_2 = z_1 e^{-i\alpha}$$

per tener conto dell'angolo di attacco. Inoltre occorre spostare il centro del cerchio di  $c = m + in$ :



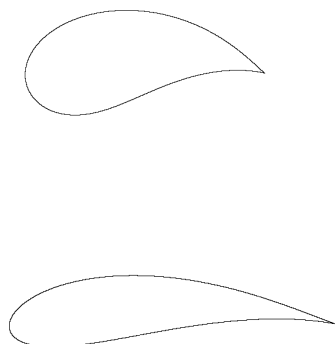


Figura 14: I profili di Joukowski asimmetrici.

$$z_3 = z_2 + c$$

ed infine la trasformazione di Joukowski:

$$z = z_3 + \frac{b^2}{z_3}$$

Quindi, se il valore di  $\Gamma$  è giusto, dobbiamo vedere il punto di ristagno coincidente con lo spigolo di coda. Se questo non accade occorre ripetere il calcolo, impostando un nuovo valore della circolazione fino a raggiungere, per tentativi, il risultato desiderato.

Una volta determinata  $\Gamma$ , con il teorema di Kutta-Joukowski è possibile calcolare il valore della portanza  $P$ :

$$P = -\rho\Gamma U.$$

La portanza è evidentemente funzione dell'angolo d'attacco e quindi possiamo determinarla teoricamente. Però i dati sperimentali ci

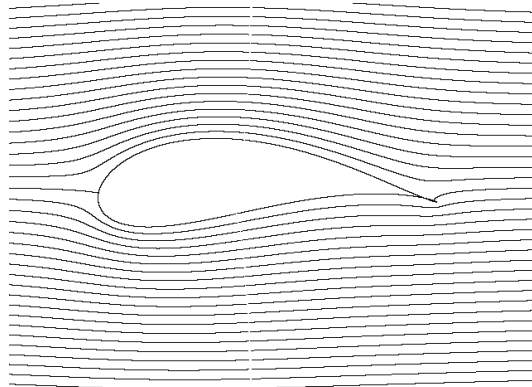


Figura 15: Le linee di corrente attorno al profilo di Joukowski asimmetrico.

dicono che essa è minore del valore teorico ed inoltre per  $\alpha = 10^\circ$  abbiamo lo *stallo*, cioè la perdita di portanza a causa del distacco della corrente sull'estradosso dell'ala.

Ricordiamo che la sperimentazione sui profili alari viene effettuata nelle gallerie del vento o nelle vasche idrodinamiche tramite delle bilance in grado di misurare direttamente la resistenza e la portanza:

$$R = C_d d \gamma \frac{U^2}{2g}$$

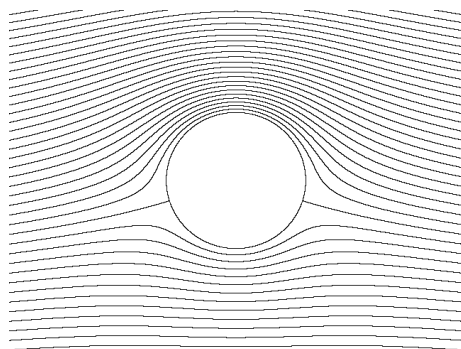
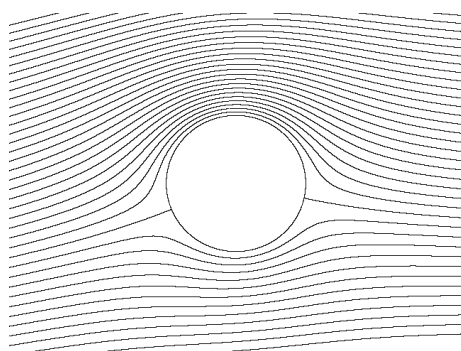
$$P = C_l l \gamma \frac{U^2}{2g}$$

dove  $d$  indica la massima larghezza alla spalla,  $l$  la lunghezza della corda e  $C_d = C_x$  il coefficiente di resistenza, mentre  $C_l = C_y$  quello di portanza che vengono ricavati dalle relazioni precedenti<sup>4</sup>.

La presente trattazione è valida per l'ala di lunghezza infinita, nelle ali reali invece abbiamo degli effetti di estremità: la differenza di pressione, maggiore all'intradosso proprio per la portanza, provoca

---

<sup>4</sup>Il N.A.C.A. National Advisory Council for Aeronautics fornisce i risultati degli studi effettuati su molte forme di profili alari.

Figura 16: Il flusso attorno ad un cilindro con una circolazione  $\Gamma$ Figura 17: Il flusso con circolazione inclinato dell'angolo d'attacco  $\alpha$ .

due flussi che si arrotolano in due grandi vortici con opposti versi di rotazione, visibili quando l'aereo attraversa una nube di polvere o di fumo. Questi vortici producono una ulteriore depressione a valle e quindi incrementano la resistenza. Per ovviare a questo inconveniente si usano dei dispositivi atti ad impedire il flusso tra l'intradosso e la parte superiore dell'ala.

I profili alari sono importanti non solo per gli aerei ma vengono impiegati anche nelle macchine idrauliche, dove il distacco si traduce in un evidente perdita di rendimento della macchina stessa.

Nel campo dell'ingegneria civile, sarebbe auspicabile, dopo tutto

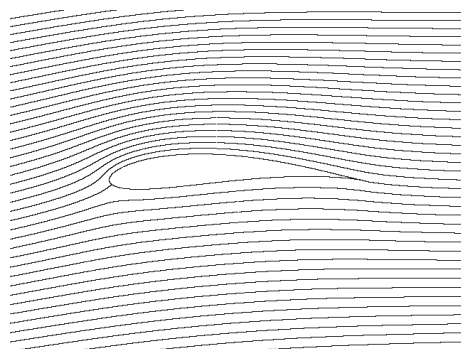


Figura 18: Con la circuitazione giusta otteniamo la portanza  $P = -\rho\Gamma U$ .

il secolo XX di ricerche sulle forme idrodinamiche, che i progettisti di ponti abbandonassero le forme medioevali delle pile per adottarne delle altre in grado di avere una influenza trascurabile sulla corrente fluviale.

Si avrebbero quindi delle opere veramente ecologiche, a bassissimo impatto, nel senso che la corrente e quindi l'alveo non risentono della presenza dell'opera. Il problema riveste una maggior importanza per i ponti costruiti su una curva del fiume. In questo caso lo strutturista non si preoccupa affatto che le pile a spigolo vivo siano poste di traverso alla corrente<sup>5</sup> provocandone un vistoso distacco con conseguenti grandi escavazioni a valle. Una corretta progettazione dovrebbe adottare invece i profili alari (tipo Joukowski o comunque dei solidi penetranti) che consentirebbero di accompagnare la corrente senza evidenti separazioni e quindi con un'influenza minima sull'alveo fluviale.

---

<sup>5</sup>Vedi il ponte della fortezza a Pisa.

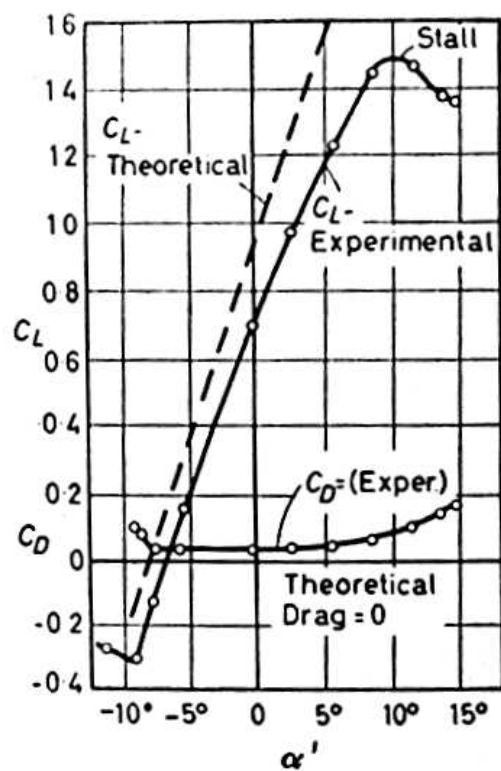


Figura 19: La portanza sperimentale, inferiore a quella teorica.

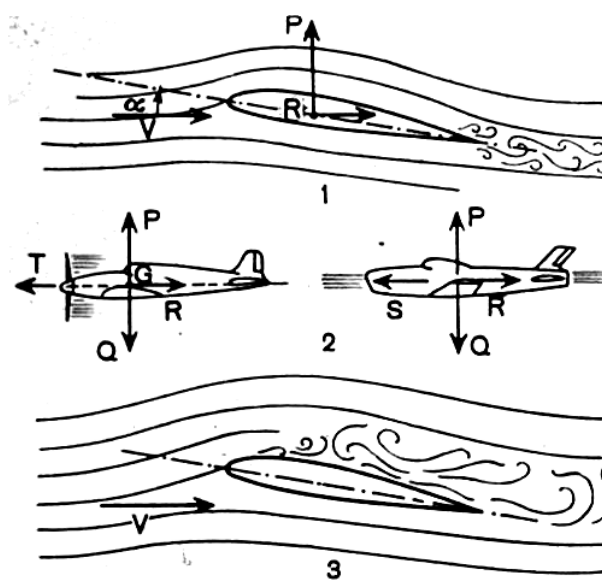


Figura 20: Lo stallo è provocato dal distacco all'estradosso dell'ala.