

Capitolo I

L'idrodinamica dei quanti

§ 1. - Premesse.

La transizione alla turbolenza, cioè il passaggio da un moto laminare, regolare ad uno del tutto differente, ossia vorticoso presenta, alla luce dell'esperienza, degli aspetti che possiamo interpretare con modelli, con procedimenti e con strumenti matematici *analoghi* a quelli quantistici che si incontrano nella meccanica atomica. L'aggettivo analogo è d'obbligo perché la costante di Planck, fondamentale nel mondo microscopico, nel nostro caso non entra per niente in gioco. Esiste però una costante, per così dire *macroscopica*, rilevata sperimentalmente, che risulta proporzionale alla viscosità del fluido.

Quindi i modelli quantistici della turbolenza fondano la loro ragione di esistere su valide basi sperimentali.

D'altra parte le numerose esperienze sul distacco dei vortici confermano, come viene esposto in questo lavoro, che per ottenere la formazione di un singolo vortice occorre un ben preciso valore della circuitazione Γ , al di sotto del quale il vortice non può esistere per il semplice fatto che le forze viscosive sono preponderanti e ne

impediscono lo sviluppo. Pertanto al di sotto di un valore fondamentale della circuitazione Γ , valore proporzionale alla viscosità¹, non possiamo osservare alcun vortice, mentre al di sopra se ne formerà soltanto uno. Per averne un secondo bisognerà quindi raggiungere il valore 2Γ altrimenti le forze viscosive impediranno il formarsi del secondo. Per esempio se avessimo solamente 1.6Γ esisterebbe nel fluido un'energia sufficiente per il primo vortice, ma non per il successivo.

Ora dato che i vortici hanno una loro peculiarità: o esistono o non esistono, sarebbe veramente assurdo parlare di mezzo vortice, tre quarti o due quinti, perché ognuno ha una sua individualità. Per esempio, con uno strattagemma sperimentale, possiamo dividerne uno ottenendone due, ma di ciascuno di essi non si può certamente parlare, come individuo, di mezzo vortice, semplicemente adesso abbiamo due vortici.

Occorre qui fare molta attenzione e precisare che, per quanto riguarda la circuitazione, al di sopra dello stato fondamentale o, nella turbolenza pienamente sviluppata, dividere a metà un vortice significa ottenerne due ciascuno con una circuitazione $\Gamma/2$, ma allo stato fondamentale quest'operazione ci farebbe scendere sotto il livello minimo Γ e i due vortici si dissolverebbero in un tempo brevissimo.

Quindi, come per le nostre teste, non possiamo parlare, senza cadere nell'assurdo, in termini di numeri reali: 1.2, 1.6, 2.3 ecc., ma di numeri interi: 1, 2, 3, \dots , n ,

¹Infatti, come vedremo in seguito: $\Gamma \sim 200\nu$.

così diviene altrettanto naturale introdurre i numeri interi e quindi quantici nella turbolenza.

Infatti per ottenere la formazione di un terzo vortice è necessaria una circuitazione 3Γ e così via. Per un numero generico di vortici, occorre un circuitazione $n\Gamma$ ed n deve essere per necessità intero ossia *quantico*.

La quantizzazione risulta quindi naturale in questo tipo di fenomeni anche se appartengono al mondo macroscopico e non a quello degli atomi. Non si tratta pertanto di ricerca di qualcosa di originale, ma, alla luce dell'esperienza, è la natura stessa delle cose che ci costringe a ragionare in tal modo, essa si svela in tutta la sua semplice realtà: le cose si fanno ovvie, si palesano ai nostri sensi ed alla nostra mente, come scriveva Galileo a proposito di ciò che osservava con il suo strumento.²

Per indagare la turbolenza viene usato il velocimetro a laser, come strumento fisico, ma anche degli apparati intellettuali, ossia il riflettere attentamente sui dati ottenuti. Tutto ciò permette di individuare una realtà che può essere inquadrata come: *gli aspetti quantistici della turbolenza*.

La turbolenza pienamente sviluppata, come abbiamo visto negli studi precedenti, è un fenomeno prettamente inerziale e pertanto segue le leggi classiche della fisica e della dinamica, come ha dimostrato Prandtl negli scambi della quantità di moto.

²*eadem sensui nostro obviam sese fecerunt*. G. Galilei, Sidereus Nuncius (1610).

Invece in condizioni critiche, cioè quando inizia la sua formazione, che evidentemente non è altro che uno sviluppo di vortici, l'introduzione dei numeri interi, *quantici* e dei metodi analoghi a quelli quantistici della meccanica atomica diviene addirittura una *necessità*.

§ 2 - La soluzione classica.

La sorgente di turbolenza e quindi di vorticità più semplice esistente in natura è la doppia scia di vortici che si distaccano da un cilindro di diametro d investito da una corrente uniforme alla velocità U .

Affrontiamo prima il problema dal punto di vista classico attraverso dei ragionamenti sulle equazioni di Navier-Stokes, che, scritte in forma tensoriale, assumono la forma ($i, j = 1, 2, 3$):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + X_i. \quad (1)$$

Queste vengono risolte numericamente con poderosi codici di calcolo agli elementi finiti. Le soluzioni, per il distacco dei vortici, si ottengono però a partire da numeri di Reynolds $R = Ud/\nu$ superiori a 100, mentre il fenomeno fisico inizia, com'è noto, da $R \simeq 50$.

Quindi tanto vale impostare un ragionamento su equazioni in forma semplificata per vedere, alla luce dei risultati sperimentali, che cosa possiamo ricavare, al massimo, da una soluzione classica.

Considerando il moto come una corrente, quindi in una sola dimensione, le precedenti si riducono, senza

gradienti di pressione e azioni di massa, alla seguente equazione:

$$U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

dove la velocità media U ha sostituito quella corrente u in accordo con l'ipotesi di Taylor sul trasporto delle strutture vorticose da parte del moto medio.

La precedente quindi, così linearizzata, assume la forma di un'equazione di diffusione, simile a quella di Fourier sul calore. Può essere risolta con il metodo della separazione delle variabili ponendo $u(x, t) = X(x)T(t)$, che sostituita nella (2) dà luogo in definitiva a due equazioni:

$$T' + \kappa^2 \nu T = 0$$

$$X'' - \frac{U}{\nu} X' + \kappa^2 = 0.$$

Dove κ è una costante e rappresenta il numero d'onda. La prima ammette una soluzione esponenziale di esaurimento, di decadimento del tempo delle fluttuazioni di velocità:

$$T = C e^{-\kappa^2 \nu t},$$

mentre la seconda, avendo per equazione caratteristica la seguente algebrica di secondo grado:

$$\Lambda^2 - \frac{U}{\nu} \Lambda + \kappa^2 = 0$$

ammette soluzioni complesse e quindi oscillanti, solo se il discriminante risulta negativo. A conti fatti ciò accade per numeri di Reynolds molto bassi ($R \sim 1$), cioè con moto lentissimo.

In queste condizioni, potendo trascurare il primo termine, la (2) si riduce proprio all'equazione di Fourier:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3)$$

le cui soluzioni, com'è noto, si diffondono ma non si propagano, smorzandosi rapidamente a causa della derivata prima rispetto al tempo.

Quindi la (3) non può, in alcun modo rappresentare l'ipotesi di Taylor, che risulta, alla luce dell'esperienza, non solo plausibile ma addirittura evidente.³

L'equazione (2), dividendo ambo i membri per UL , dove L rappresenta una grandezza caratteristica della corrente, può essere espressa rendendo esplicito il numero di Reynolds R :

$$\frac{1}{L} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{UL} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Ora se consideriamo $R \sim 1$, tutti e tre i termini della precedente hanno lo stesso ordine di grandezza, cioè $\sim 10^2$, ma se $R \sim 10^2$ il secondo membro, riducendosi all'unità, diviene trascurabile rispetto agli altri. La (4) si trasforma allora nell'equazione di Euler:

³Basta infatti osservare le strutture vorticosi che, in un fiume od in un canale, vengono trascinate a valle dalla corrente.

$$U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

le cui soluzioni, com'è facile verificare, sono delle funzioni arbitrarie del tipo:

$$u(x, t) = f(x - Ut)$$

cioè delle fluttuazioni che si propagano in direzione x alla velocità U , proprio come richiede l'ipotesi di Taylor.

Tutto questo può essere maggiormente evidenziato derivando la (5) parzialmente prima rispetto ad x poi rispetto a t . Dato che esisitono le condizioni per la validità del teorema di Schwarz, uguagliando le derivate miste otteniamo immediatamente l'equazione di D'Alembert:

$$U^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Come si può facilmente verificare la (6) ammette come soluzione delle armoniche del tipo:

$$u(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)} \quad (7)$$

dove κ indica il numero d'onda, ω la pulsazione e $\varphi = \kappa x - \omega t$ la fase. Inoltre l'argomento della (7) può essere scritto come $(x - Ut)$, quindi le fluttuazioni non si diffondono, come per l'equazione di Fourier, ma si propagano alla velocità di fase U come per l'equazione di Euler, sempre in accordo con l'ipotesi di Taylor.

In un punto di ascissa nota la (7) assume la seguente forma, a meno di una costante:

$$u(t) = ae^{i(\omega t)}. \quad (8)$$

Siamo quindi in presenza di una sinusoide, cioè di un oscillatore con fluttuazioni di velocità di ampiezza a e pulsazione ω . Un oscillatore ha un'energia cinetica $1/2mU^2$ ed un'energia potenziale $1/2ma^2\omega^2$, esse risultano uguali e quindi abbiamo: $U = 2\pi a f$ ed introducendo il numero di Strouhal S :

$$S = \frac{fd}{U}$$

otteniamo per $a = \alpha d$:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha}.$$

Nel caso del distacco dei vortici da un cilindro $\alpha = 0.75$, pertanto otteniamo $S = 0.21$, cioè la classica legge di Strouhal, ossia del valore costante di $S = 0.2$, indipendente dal numero di Reynolds.

Concludendo possiamo osservare che le soluzioni classiche non possono dirci più di ciò che abbiamo visto, inoltre, per l'equazione di D'Alembert non esistono limiti inferiori alle scale della turbolenza λ , esse possono essere piccole a piacere, mentre in realtà la viscosità ne influenza inferiormente le dimensioni, pertanto occorre ragionare sulla limitazione delle celle nello spazio delle fasi.

§ 3 - La limitazione delle celle nello spazio delle fasi.

Lo spazio delle fasi è costituito, com'è noto, da sei dimensioni: le tre coordinate ordinarie ed inoltre le tre componenti della quantità di moto. In un fluido, se ci riferiamo all'unità di massa, quest'ultime si riducono alle componenti della velocità. Un punto dello spazio delle fasi rappresenta completamente lo stato dinamico del sistema e prende il nome di punto rappresentativo. Per eseguire una statistica su di un sistema costituito da numerose particelle occorre dividere lo spazio delle fasi in cellette $\Delta x_i \Delta u_i$ di dimensione arbitraria, tale dimensione, infatti, deve soltanto seguire dei criteri pratici: celle troppo piccole conterranno pochi punti rappresentativi provocando una notevole dispersione, mentre delle celle troppo grandi ridurranno la risoluzione della statistica. Nel caso di un fluido perfetto dobbiamo necessariamente seguire questo criterio esclusivamente pratico, invece per un fluido newtoniano in moto turbolento la dimensione delle celle deve rispettare la seguente relazione ($i = 1, 2, 3$):

$$\Delta x_i \Delta u_i \geq R\nu \quad (9)$$

che rappresenta la condizione di esistenza della turbolenza, comprendendo, con l'uguaglianza, anche la transizione. R indica un numero di Reynolds critico che, moltiplicato per la viscosità cinematica ν fornisce il valore di una costante. Il volume delle celle non può essere arbitrario perché se la (9) non è soddisfatta, cioè il loro

valore è minore di $R\nu$, si vanno a considerare zone di fluido in moto laminare.

L'esperienza, come l'instabilità dello strato limite di Blasius, ci suggerisce inoltre che la transizione avviene per oscillazioni di lunghezza λ correlata alla velocità dalla seguente relazione analoga a quella di De Broglie:

$$\lambda = \frac{K}{u} \quad (10)$$

dove K indica la costante di quantizzazione universale, valida per tutti i fluidi, che assume il valore $K = 2550\nu$ ed ha le dimensioni di un'azione per unità di massa.

Per il fatto che trattiamo di fenomeni ondulatori vale il teorema fondamentale di Fourier dove si afferma che la lunghezza Δx di un pacchetto d'onde e la riga spettrale corrispondente $\Delta\kappa$ esiste la seguente relazione:

$$\Delta x_i \Delta \kappa_i \geq \frac{1}{2} \quad (11)$$

dove con $\kappa = 2\pi/\lambda$ si indica un numero d'onda. Introducendo il numero d'onda nella (10) e sostituendolo nella (11) otteniamo:

$$\Delta x_i \Delta u_i \geq \frac{K}{4\pi}. \quad (12)$$

Quindi la costante R della (9) assume un valore pari a 203. Indicando con $k = K/2\pi$ la (12) prende la seguente forma:

$$\Delta x_i \Delta u_i \geq \frac{k}{2} \quad (13)$$

la costante k vale quindi $406\nu^4$. Il significato fisico delle (12) e (13) è il seguente: data una fluttuazione di velocità Δu , l'energia fornita dal moto medio non è sufficiente per estrarre pacchetti di dimensioni inferiori a Δx , le forze viscosse non lo consentono. Inoltre se nella (13) poniamo $\Delta x = \lambda$ e $\Delta u = U$, dato che lo sviluppo di un vortice in rotazione può essere visto come $\lambda = 2\pi r$ e che, per definizione, abbiamo $\Gamma = 2\pi r U$, otteniamo:

$$\Gamma \geq 203\nu$$

che, nell'uguaglianza, rappresenta proprio il minimo valore al di sotto del quale il vortice non esiste perché le forze viscosse ne impediscono lo sviluppo.

Il lettore attento avrà riconosciuto a questo punto la profonda analogia esistente tra le relazioni precedenti e la disuguaglianza di Heisenberg della meccanica quantistica. Si tratta di un'analogia solo formale, ovviamente qui siamo nel campo dei fenomeni macroscopici indipendenti dalla costante di Planck, tuttavia, per i fluidi newtoniani, esiste una costante di quantizzazione K proporzionale alla viscosità che interviene nella transizione alla turbolenza e nello strato limite.

⁴Le osservazioni sperimentali suggeriscono che per i fenomeni di instabilità dello strato limite deve essere considerata la costante K , mentre $k = K/2\pi$ appare nel distacco dei vortici.

§ 4 - La funzione d'onda e la sua equazione.

Nella turbolenza abbiamo in ogni punto, com'è noto, delle fluttuazioni di velocità che vengono registrate dagli strumenti e, con un'analisi di Fourier, possono essere scomposte in armoniche. Risulta quindi naturale studiare il fenomeno fisico introducendo una funzione d'onda. L'energia cinetica del fluido è proporzionale, in ogni punto, a u^2 , quindi possiamo pensare ad una funzione d'onda ψ , generalmente complessa, detta ampiezza d'onda, tale che il suo modulo al quadrato $\psi\psi^*$ sia proporzionale all'energia cinetica presente nel fluido. Allo stesso modo la funzione d'onda ψ può essere pensata come un'ampiezza di probabilità, tale che il suo modulo esprima, oltre all'energia una densità di probabilità. Oltre a conoscere l'effettivo valore di u^2 possiamo quindi stimare la probabilità che in un punto del campo di moto si verifichi una fluttuazione spontanea o *burst*. Come evento da prendere in esame possiamo indifferentemente considerare la formazione di un vortice da cui deriva appunto una fluttuazione, oppure la probabilità di trovare una particella in un certo volume. Infatti dove si sviluppa un vortice avremo una maggiore probabilità di trovarvi una generica particella di fluido perché questa viene catturata e costretta a circolare. Spesso si verifica una coppia di vortici proprio per avere una circolazione complessiva nulla nel moto circostante, quindi in queste condizioni la funzione d'onda e di conseguenza la probabilità di avere una particella in questa regione sarà diversa da zero. Allo stato critico l'evento si veri-

fica certamente in qualche punto del campo di moto e quindi la probabilità P su tutto il dominio σ occupato dal fluido risulta:

$$P = \int_{\sigma} \psi\psi^* = 1 \quad (14)$$

che rappresenta la condizione di normalizzazione della funzione d'onda. Allo stesso tempo l'integrale è proporzionale all'energia cinetica totale E_{tot} , riferita all'unità di massa, presente su tutto il campo di moto:

$$\int_{\sigma} \psi\psi^* = 2E_{tot}. \quad (15)$$

Quindi il modulo della funzione d'onda può essere visto sia come una frazione dell'energia totale presente in quel determinato punto, sia come ampiezza di probabilità relativa all'evento: *formazione di un vortice*. Dividendo infatti la (15) per $2E_{tot}$ si riottiene immediatamente la condizione di normalizzazione (14).

Lo stato del sistema e la sua evoluzione nel tempo è noto solo se conosciamo la funzione $\psi(x_i, t)$, soluzione di un'equazione lineare molto semplice detta appunto equazione d'onda. Pertanto cerchiamo un'equazione che ci fornisca la funzione d'onda per poi determinare la probabilità di trovare una generica particella in una data zona occupata dal fluido. Per fare ciò dobbiamo conciliare la meccanica delle particelle con quella ondulatoria. Quest'ultima è basata sul principio della minima fase di Fermat secondo il quale un'onda segue il percorso con la minima fase φ , in termini di calcolo delle variazioni:

$$\delta \int_A^B d\varphi = 0. \quad (16)$$

Una particella invece segue la traiettoria secondo il principio della minima azione:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dS = 0. \quad (17)$$

Dove ora S rappresenta appunto l'azione cioè il prodotto dell'energia per il tempo e la costante k ne fornisce il minimo valore, pertanto viene chiamata anche quanto d'azione. Un pacchetto d'onde ed una particella devono soddisfare le relazioni (16) e (17), pertanto è logico supporre che in ogni istante l'azione debba essere proporzionale alla fase, assumiamo quindi:

$$S = k\varphi \quad (18)$$

con la costante di proporzionalità k non può essere altro che il quanto d'azione. Se adesso poniamo l'attenzione su di un'onda ψ che si propaga in direzione x e quindi con una fase $\varphi = \kappa x = \omega t$ ($\kappa = 2\pi/\lambda$) ed un'ampiezza a , possiamo scrivere:

$$\psi = ae^{i\varphi} \quad (19)$$

e per la (18):

$$\psi = ae^{i\frac{S}{k}} \quad (20)$$

ma dato che $S = Et$ otteniamo:

$$E = k\omega. \quad (21)$$

Se effettuiamo la derivata parziale rispetto al tempo della (20) abbiamo:

$$-ik \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} \psi \quad (22)$$

e ricordando l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

possiamo ricavare formalmente dalla (22) l'equazione d'onda cercata:

$$-ik \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_{op} \psi \quad (23)$$

formalmente perché H_{op} non rappresenta l'hamiltoniana classica ma un operatore, detto hamiltoniano, definito dalla seguente espressione:

$$H_{op} = -\frac{k^2}{2} \Delta + V \quad (24)$$

che ha le dimensioni di un'energia per unità di massa, dove V indica l'energia potenziale e Δ il laplaciano:

$$\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Pertanto, tramite la (24), la (23) si trasforma nella seguente espressione:

$$-\frac{k^2}{2}\Delta\psi + V\psi = ik\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (25)$$

che non è altro che l'equazione d'onda di Schrödinger dipendente dal tempo. Da questa possiamo dedurre un'equazione indipendente dal tempo, infatti possiamo porre la funzione ψ come il prodotto di due funzioni: ψ_o funzione delle sole coordinate spaziali e T solo del tempo. Sostituiamo il prodotto $\psi_o T$ nell'equazione (23) ed otteniamo:

$$ik\psi_o\frac{dT}{dt} = H_{op}\psi_o T \quad (26)$$

a questo punto separiamo le variabili:

$$ik\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\psi_o}H_{op}\psi_o. \quad (27)$$

Il primo membro è funzione solo del tempo, mentre il secondo delle sole coordinate spaziali, quindi ambo i membri avranno un valore costante. Indichiamo con E tale costante che ha le dimensioni di un'energia per unità di massa. In questo modo, dalla (27), otteniamo due equazioni, la prima:

$$\frac{dT}{dt} = -i\frac{T}{k}E \quad (28)$$

che ammette come soluzione:

$$T = e^{-i\frac{E}{k}t} \quad (29)$$

quindi in definitiva la soluzione dell'equazione d'onda è:

$$\psi = \psi_o e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (30)$$

dove ψ_o è la soluzione della seconda equazione ottenuta dalla (27):

$$H_{op}\psi_o = E\psi_o \quad (31)$$

detta equazione di Schrödinger indipendente dal tempo e quindi rappresenta uno stato stazionario, inoltre essendo lineare la soluzione generale sarà una combinazione di molte soluzioni particolari, cioè:

$$H_{op}\psi_{on} = E_n\psi_{on} \quad (32)$$

dove ψ_{on} sono dette autofunzioni dell'equazione di Schrödinger e E_n autovalori per il fatto che costituiscono un caso particolare del problema di Sturm-Liouville.

Nel § 2 abbiamo visto come le fluttuazioni di velocità, trascinate a valle dalla corrente, secondo l'ipotesi di Taylor, siano argomento dell'equazione di D'Alembert. Se scriviamo quest'ultima in forma generale:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = U^2\Delta\psi \quad (33)$$

dove U indica la velocità di fase nella generica direzione del moto e Δ il laplaciano, possiamo comprendere maggiormente la precedente deduzione della (25). Se sostituiamo nella (33) un'onda del tipo:

$$\psi = \psi_o e^{i\omega t}$$

otteniamo:

$$\Delta\psi_o + \kappa^2\psi_o = 0 \quad (34)$$

ricordando la relazione di De Broglie $\lambda = K/u$ ed inoltre che l'energia cinetica $u^2/2 = (E - V)$, abbiamo:

$$\Delta\psi_o + \frac{2}{k^2}(E - V)\psi_o = 0 \quad (35)$$

ed infine introducendo l'operatore hamiltoniano (24) otteniamo in definitiva:

$$H_{op}\psi_o = E_n\psi_o$$

cioè l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo valida solo per le onde monocromatiche.

Per determinarla nel caso generale ricordiamo l'espressione della funzione d'onda:

$$\psi = \psi_o e^{-i\frac{E}{k}t}$$

deriviamo la precedente rispetto al tempo:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\frac{E}{k}\psi$$

la ψ inoltre deve soddisfare l'equazione:

$$\Delta\psi + \frac{2}{k^2}(E - V)\psi = 0$$

eliminando l'energia E dalle ultime due otteniamo:

$$-\frac{k^2}{2}\Delta\psi + V\psi = ik\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

cioè di nuovo l'equazione temporale di Schrödinger valida quindi per qualsiasi onda, però avendola determinata in questo modo si giustifica l'introduzione, in precedenza, dell'operatore hamiltoniano, solo così infatti l'equazione di Hamilton-Jacobi si trasforma in quella di Schrödinger.

§ 5 - L'operatore hamiltoniano ed il caso limite.

Vediamo di chiarire ulteriormente il significato dell'operatore hamiltoniano che può essere dedotto dalla funzione classica di Hamilton, infatti riferendoci all'unità di massa, per una direzione x_i ed una componente di velocità u_i la funzione H assume la forma:

$$H = \frac{u_i^2}{2} + V. \quad (36)$$

Per la relazione fondamentale di De Broglie $\lambda = K/u$ avremo, introducendo il numero d'onda $\kappa = 2\pi/\lambda$:

$$\kappa_i^2 = \frac{u_i^2}{k^2}. \quad (37)$$

La relazione di De Broglie riguarda un'onda ψ che trasla in direzione x_i con numero d'onda κ_i :

$$\psi = ae^{i\kappa_i x_i}. \quad (38)$$

Derivando parzialmente la precedente due volte rispetto alla coordinata generica, abbiamo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = -\kappa_i^2 \psi \quad (39)$$

ed introducendo la (37) osserviamo che il seguente operatore risulta uguale all'energia cinetica per unità di massa:

$$-\frac{k^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{u_i^2}{2}. \quad (40)$$

Pertanto tenendo conto delle tre direzioni e dell'energia potenziale V otteniamo:

$$-\frac{k^2}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V = \sum_i \frac{u_i^2}{2} + V. \quad (41)$$

Quindi nel caso di validità della relazione di De Broglie la funzione hamiltoniana si trasforma nell'operatore (24) che risulta appunto l'operatore hamiltoniano dell'equazione di Schrödinger. Nel caso limite in cui la viscosità del fluido divenga trascurabile e quindi $K \rightarrow 0$, abbiamo che, sempre per la relazione di De Broglie, anche $\lambda \rightarrow 0$, perciò nel fluido perfetto non esiste più un limite inferiore alle lunghezze d'onda e quindi alle scale della turbolenza. Quando la relazione di De Broglie non è più valida si ricade dunque nell'idrodinamica classica dove esiste solo la funzione hamiltoniana che per il moto stazionario risulta costante, ritroviamo quindi il teorema di Bernoulli: $H = \text{costante}$.