Capitolo II

La transizione alla turbolenza

§ 1. - Il flusso tra lastre pianparallele.

Ci proponiamo di applicare i metodi visti nel capitolo precedente ai principali casi di transizione alla turbolenza, quali il flusso tra lastre piane e parallele, il flusso in un condotto circolare ed infine l'oscillatore armonico. Vediamo, in questo paragrafo il primo caso.

Applichiamo l'equazione di Schrödinger, con la costante di quantizzazione $K = 2550\nu$ valida per qualsiasi fluido newtoniano, che, ad una determinata temperatura, e quindi a viscosità costante ν, scorre con velocità media U, tra due lastre indefinite distanti h. Pertanto la funzione ψ, ampiezza di probabilità o frazione dell'energia totale, si ottiene risolvendo la (34) del capitolo precedente che si riduce alla:

$$\psi'' + \kappa^2\psi = 0 \tag{1}$$

con le condizioni al contorno: $\psi = 0$ per $x = 0$ ed $x = h$ rispettivamente.

Le condizioni al contorno stabiliscono che la probabilità delle fluttuazioni, o la loro energia cinetica, alle pareti è nulla per la condizione di aderenza dei fluidi viscosi.

L'integrale generale della (1) è, com'è noto:

$$\psi = A \sin \kappa x + B \cos \kappa x. \tag{2}$$

Dalla prima condizione al contorno otteniamo $B = 0$ e dalla seconda:

$$\kappa h = \pi n \tag{3}$$

dove $n = 1, 2, 3...$ Dalla (3) otteniamo κ che sostituito nella (2) ci fornisce gli integrali particolari:

$$\psi_n = A \sin \frac{n\pi}{h} x \tag{4}$$

La costante A si ricava dalla condizione di normalizzazione che in questo caso assume la forma:

$$\int_0^h A^2 \sin^2 \frac{n\pi}{h} x dx = 1 \tag{5}$$

da cui otteniamo $A^2 = 2/h$ e quindi la (3) diviene:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin \frac{n\pi}{h} x. \tag{6}$$

La densità di probabilità, o la frazione di energia totale ψ^2, sarà allora:

$$\psi_n^2 = \frac{2}{h} \sin^2 \frac{n\pi}{h} x. \tag{7}$$

che, per $n = 1$, presenta un massimo per $x = h/2$ del valore $2/h$.

Risulta importante inoltre ricavare dalla (3) il numero di Reynolds critico, infatti ricordando l'espressione del numero d'onda, si ottiene:

$$\frac{2\pi}{\lambda}h = \pi n, \tag{8}$$

introducendo la relazione di De Broglie ($\lambda = K/U$), con il valore della costante universale $K = 2550\nu$, abbiamo, per $n = 1$, il minimo valore, cioè il numero di Reynolds critico R_o:

$$R_o = \frac{Uh}{\nu} = \frac{2550}{2}, \tag{9}$$

che risulta solo del 2% inferiore al dato sperimentale di 1300 riportato da molti autori, quindi la semplice tecnica adottata conduce ad un ottimo accordo con i risultati sperimentali.

§ 2. - Il flusso in un condotto circolare.

Per studiare l'andamento della densità di probabilità o dell'energia di fluttuazione all'interno della condotta di raggio a percorsa da un fluido in equilibrio termico a temperatura costante e quindi avente una viscosità cinematica ν, applichiamo di nuovo l'equazione d'onda tenendo conto del Laplaciano in coordinate cilindriche. Infatti, per la simmetria assiale: $\partial\psi/\partial\theta$ e $\partial\psi/\partial z$ sono entrambe nulle, per cui:

$$\psi'' + \frac{1}{r}\psi' + \kappa^2\psi = 0, \tag{10}$$

moltiplicando per r^2 otteniamo:

$$r^2\psi'' + r\psi' + \kappa^2 r^2\psi = 0, \tag{11}$$

cioè l'equazione di Bessel di ordine zero, la cui soluzione limitata è data da:

$$\psi(r) = CJ_o(\kappa r) \tag{12}$$

con la condizione al contorno $\psi = 0$ per $r = a$ per l'aderenza del fluido alla parete del condotto, $J_o(\kappa r)$ rappresenta la funzione di Bessel di ordine zero, la costante C deve essere determinata per mezzo della condizione di normalizzazione, che, essendo $d\sigma = 2\pi r dr$, assume la forma:

$$2\pi C^2 \int_0^a J_o^2(\kappa r) r dr = 1. \tag{13}$$

Per il calcolo del precedente integrale occorre far riferimento allo sviluppo in serie della funzione di Bessel ($x = \kappa r$):

$$J_o(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + ... \tag{14}$$

Da quest'ultima relazione possiamo ricavare il valore della funzione di Bessel con l'approssimazione voluta e sostituirlo nella (13) per calcolare numericamente l'integrale ed ottenere infine il valore di C. Quest'ultimo, una volta inserito nella (12), consente di valutare finalmente la funzione $\psi(r)$ e quindi la frazione di energia o la densità di probabilità tramite la $\psi^2(r)$. Il numero d'onda κ viene invece ricavato dalla condizione al contorno:

$$J_o(\kappa a) = 0 \tag{15}$$

appunto per la condizione di aderenza alla parete del condotto. La funzione di Bessel di ordine zero si annulla per una serie di valori, il primo dei quali è $\alpha = 2.4048$. L'argomento della (15) deve essere quindi:

$$(\frac{2\pi}{\lambda} a) = \alpha. \tag{16}$$

Essendo al solito $\lambda = K\nu/U$, con $K = 2550\nu$, otteniamo il numero di Reynolds critico per un condotto a sezione circolare:

$$R_o = \frac{2aU}{\nu} = 2550\frac{\alpha}{\pi} \tag{17}$$

valore solo del 2.5% inferiore a quello accertato sperimentalmente, cioè 2000, quindi in pieno accordo con l'esperienza.

§ 3 - L'oscillatore armonico.

Come abbiamo visto nel I capitolo, il distacco dei vortici può essere assimilato ad un oscillatore armonico classico agli alti numeri di Reynolds, ma in condizioni critiche e subcritiche occorre introdurre il modello dell'oscillatore quantizzato.

Ipotizziamo quindi un oscillatore di torsione con pulsazione ω ed ampiezza $a = 2\pi d$, con il distacco dei vortici proprio alla frequenza ω, pertanto l'equazione di Scrödinger indipendente dal tempo assume, per questo oscillatore armonico, la forma seguente:

$$\psi'' + \frac{2}{k^2}(E - V)\psi = 0 \tag{18}$$

dove l'energia potenziale V risulta:

$$V = \frac{1}{2}\omega^2 x^2.$$

L'integrazione della (18) non è altro che un problema di Sturm-Liuville, pertanto risulta opportuno introdurre in luogo della x la variabile adimensionale ξ definita nel modo seguente:

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega}{k}}x$$

perciò la (18) si trasforma nella:

$$\psi'' + \left(\frac{2E}{k\omega} - \xi^2\right)\psi = 0, \tag{19}$$

dove per valori grandi di ξ si può trascurare il primo termine tra parentesi in confronto di ξ^2, allora l'equazione:

$$\psi'' = \xi^2\psi$$

ammette come soluzione asintotica:

$$\psi = \mathrm{e}^{\pm\frac{\xi^2}{2}}.$$

Infatti se la deriviamo trascurando il termine d'ordine inferiore, cioè che non contiene ξ^2, otteniamo proprio la precedente equazione differenziale.

Poiché la funzione d'onda deve rimanere finita quando $\xi \to \pm\infty$ occorre scegliere il segno $-$ nella precedente e quindi sostituire nella (19) l'espressione:

$$\psi = \chi \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

dove χ è funzione di ξ, ottenendo in definitiva:

$$\chi'' + 2\xi\chi' + \left(\frac{2E}{k\omega} - 1\right)\chi = 0, \tag{20}$$

che se poniamo:

$$\left(\frac{2E}{k\omega} - 1\right) = 2n \tag{21}$$

si trasforma nell'equazione di Hermite:

$$\chi'' + 2\xi\chi' + 2n = 0, \tag{22}$$

L'equazione di Hermite ammette una soluzione finita solo per valori interi di n ($n = 0, 1, 2, 3...$), per cui dalla (21) ricaviamo gli autovalori del problema di Sturm-Liuville cioè i livelli energetici E_n dell'oscillatore armonico:

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right) k\omega \tag{23}$$

con ($n = 0, 1, 2, 3...$).

Le autofunzioni sono proporzionali ai polinomi di Hermite H_n, le soluzioni dell'equazione (22) assumono quindi la forma:

$$\chi_n = A_n H_n(\xi)$$

dove i polinomi di Hermite, da non confondersi con l'operatore di Hamilton, sono dati dalla formula generatrice di Rodrigues:

$$H_n(\xi) = (-1)^n \mathrm{e}^{\xi^2} \frac{\mathrm{d^n e}^{-\xi^2}}{\mathrm{d}\xi^{\mathrm{n}}}.$$

Le costanti A_n vengono determinate per mezzo della condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x) dx = 1$$

giungendo infine all'espressione delle autofunzioni:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\omega}{\pi k}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \mathrm{e}^{-\frac{\omega}{2k} x^2} H_n \left(x\sqrt{\frac{\omega}{k}}\right). \qquad (24)$$

La densità di probabilità è infine data da ψ_n^2.

Le autofunzioni sono disposte sui livelli energetici ugualmente distanziati della quantità $k\omega$ che rappresenta appunto il quanto d'energia.

Per tutti i livelli la densità di probabilità si spinge oltre l'ampiezza dell'oscillatore classico inoltre per la (23) i livelli energetici dell'oscillatore divengono sempre più fitti al diminuire di k e quindi di ν, fino a riavere l'energia continua per il fluido perfetto.

L'oscillatore quantizzato può assumere diversi stati, ognuno con una corrispondente energia, occorre quindi valutare l'energia media che l'oscillatore assume quando si trova nello stato più probabile. La trattazione completa riportata da Fermi sarà esposta nel prossimo capitolo, qui ne diamo solo il risultato: l'energia media totale ε per un oscillatore quantizzato in contatto con una fonte di energia T, viene fornita dalla seguente relazione:

$$\varepsilon = \frac{k\omega}{\mathrm{e}^{\frac{k\omega}{T}} - 1}. \tag{25}$$

Se facciamo tendere a zero il quantum di energia, si osserva che ε tende a T. L'energia media si riduce al caso dell'oscillatore classico che, all'equilibrio statistico, ha la stessa energia della sorgente con cui è in contatto. In sostanza per valori dell'energia media superiori al quantum $k\omega$ abbiamo in comportamento sostanzialmente classico, invece per valori inferiori si ha una deviazione dalla legge classica secondo la relazione (25). In ultima analisi, il distacco dei vortici si innesca, quindi si raggiunge lo stato critico, quando il sistema assume un quantum di energia, cioè $k\omega/T = 1$. Pertanto possiamo utilizzare la relazione (25) per calcolare teoricamente i valori critici iniziali della frequenza e della velocità. Infatti $\varepsilon = T = a^2\omega^2$ come abbiamo visto nel capitolo I, per $k\omega/T = 1$ ed $a = 2\pi d$ otteniamo la frequenza critica ω_o:

$$\omega_o = \frac{k}{(2\pi d)^2(\mathrm{e}-1)}. \tag{26}$$

Inoltre essendo $\omega_o = U_o^2/k$ possiamo calcolare la velocità critica:

$$U_o = \frac{k}{(2\pi d)\sqrt{\mathrm{e}-1}}. \tag{27}$$

I valori calcolati con le espressioni (26) e (27) sono in accordo con i dati sperimentali. Tuttavia possiamo renderli adimensionali calcolando i numeri di Reynolds e di Strohual critici: $R_o = U_o d/\nu$ e $S_o = \omega_o d/U_o$:

$$R_o = \frac{406}{2\pi\sqrt{\mathrm{e}-1}} = 49 \tag{28}$$

$$S_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{e}-1}} = 0.12, \tag{29}$$

entrambi i valori sono in pieno accordo con l'esperienza. Quindi in ultima analisi l'oscillatore allo stato critico può assumere diversi livelli energetici, però tutti questi, tranne quello fondamentale, sono supercritici e perciò instabili, per cui il sistema ricade sul livello immediatamente inferiore emettendo quanti di energia $k\omega$. Nel prossimo capitolo vedremo che lo stato eccitato più probabile risulta il primo con $n = 1$ e quindi la transizione avviene prevalentemente tra questo ed il livello fondamentale. L'oscillatore quantistico spiega quindi il comportamento di un cilindro investito da una corrente uniforme per numeri di Reynolds molto vicini al valore critico. Infatti se la velocità della corrente è inferiore al valore critico U_o allora il sistema si trova nello stato fondamentale di minima energia corrispondente al numero quantico $n = 0$, con una densità di probabilità ψ^2 data dalla prima autofunzione. Dalla visualizzazione di un flusso subcritico notiamo infatti le due celle di circolazione controrotanti, pertanto le particelle, catturate da queste, hanno giustamente una maggiore probabilità di trovarsi in questa regione del campo di moto.

Allo stato critico la corrente conferisce con continuità al sistema un'energia sufficiente per raggiungere il livello immediatamente superiore ($n = 1$), però risulta instabile e ricade continuamente sul livello fondamentale emettendo quanti di energia $k\omega$ con il conseguente distacco di vortici alla frequenza ω. La frequenza di distacco infatti risulta identica alla frequenza dell'oscillatore di torsione perché si può logicamente pensare che ogni oscillazione completa di questo produca il distacco di un vortice con pulsazione ω ed ampiezza $a = 2\pi d$. Risulta quindi del tutto naturale l'introduzione della costante $k = K/2\pi$ ed abbiamo pertanto un'unica costante di quantizzazione: $K = 2550\nu$.

Perciò la relazione fondamentale per il distacco allo stato critico diviene:

$$E = k\omega. \tag{30}$$

Quest'ultima è stata verificata sperimentalmente con molta cura presso il laboratorio dell'Istituto di Idraulica di Pisa determinando il valore della costante k che risulta appunto pari a 406ν, al quale corrisponde $K = 2550\nu$, quindi essa costituisce una notevole scoperta perché svela la natura quantistica dell'emissione di vorticità e quindi dell'inizio turbolenza stessa permettendo di applicare vantaggiosamente i metodi della meccanica quantistica.

§ 4 - L'emissione di vorticità in condizioni subcritiche.

Quando il numero di Reynolds è inferiore al valore critico si può ottenere ancora il distacco di vortici facendo oscillare il cilindro ad una frequenza opportuna.

Pertanto in base a ciò che è stato detto nel § precedente si dovrebbero osservare i seguenti fatti:

(a) introducendo energia nel sistema si ottiene l'emissione di vortici anche per velocità inferiori al valore critico;

(b) il fenomeno non si deve osservare se il sistema si trova al di sotto del livello fondamentale di energia con una circuitazione inferiore al valore minimo;

(c) il valore della costante k deve essere identico a quello riscontrato nell'emissione spontanea.

Presso il laboratorio dell'Istituto di Idraulica di Pisa è stato approntato un dispositivo sperimentale molto preciso per verificare tutto ciò che è stato esposto. Tale apparato consiste un carrello oscillante su guide a minimo attrito comandato da una camma calettata sull'asse di un motore elettrico controllato elettronicamente.

Le numerose esperienze effettuate hanno confermato in pieno i punti (a),(b),(c), cioè sono stati osservati i vortici per $R < 50$ solo in presenza di vibrazioni, anche di ampiezza minima (0.12 mm), mentre scomparivano puntualmente a carrello fermo. Nonostante la presenza si oscillazioni il fenomeno non avveniva per $R < 25$.

Questo non è altro che la conseguenza del valore minimo della circuitazione $\Gamma = 203\nu$, infatti $\lambda = 2\pi a U$, ma dato che, come abbiamo visto per il valore critico $\Gamma = 406\nu$, perciò arriviamo in definitiva il valore minimo del mumero di Reynolds in modo analogo alla (28):

$$R_{min} = \frac{203}{2\pi\sqrt{\mathrm{e}-1}} \simeq 25.$$

Al di sotto di tale valore non si possono sviluppare dei vortici, o perlomeno, se esistono, saranno di una entità talmente esigua da non potersi distaccare dal filo oscillante.

Inoltre la frequenza di distacco ω, corrispondente alla riga spettrale di maggior energia, risulta correlata alla velocità U della corrente in arrivo ed alla velocità critica U_o tramite la seguente relazione:

$$U^2 = k\omega - L \tag{31}$$

dove:

$$L = (U_o - U)^2. \tag{32}$$

Le precedenti trovano una logica spiegazione nella teoria dei quanti, infatti all'oscillatore che si trova con

$U < U_o$ dobbiamo fornirgli un quantum d'energia $k\omega$ diminuito del lavoro L necessario per riportare il sistema in condizioni critiche. In altri termini per ottenere vortici che abbiano la stessa energia media della corrente, cioè U^2, occorre fornire un quanto diminuito del lavoro necessario per estrarli che corrisponde appunto all'energia occorrente per riportare l'oscillatore allo stato critico secondo la (32). Si noti infine che la relazione (31) presenta delle analogie formali con quella di Einstein per l'effetto fotoelettrico.

Inoltre, come vedremo nel capitolo dedicato alle verifiche sperimentali, senza alcuna correzione, i dati risultano in pieno accordo con l'energia media dell'oscillatore quantizzato, appunto secondo la (25), ma le (31) e (32) rimangono sempre valide, come una prima analisi, per inquadrare il problema.

Quindi, come abbiamo visto, l'applicazione della (25), serve per determinare sia i valori critici dei numeri di Reynolds e di Strouhal, sia per inquadrare i dati sperimentali dell'oscillatore in condizioni subcritiche.