

## Capitolo III

### Le statistiche della teoria dei quanti

#### § 1. - Generalità.

Possiamo eseguire in genere una statistica per una popolazione costituita da oscillatori o quasi particelle. Nella statistica classica viene preso in considerazione un determinato parametro, occorre poi procedere ad una discretizzazione dividendolo in un numero finito di intervalli ed infine conteggiare gli elementi che ricadono in ciascuno di essi, questa operazione è di solito arbitraria e riconducibile solo a regole pratiche, infatti se vengono adottati degli intervalli troppo grandi perdiamo in risoluzione, se invece questi sono molto piccoli abbiamo l'inconveniente di trovarvi pochi elementi ottenendo quindi dei valori molto dispersi. Se al contrario l'energia è quantizzata gli intervalli sono già definiti, come abbiamo visto per l'oscillatore armonico, la discretizzazione diviene naturale e non più arbitraria come in precedenza, al limite, quando gli intervalli sono molto ravvicinati, cioè  $\nu \rightarrow 0$ , si ricade nella statistica classica.

Il modo di procedere alla divisione non è però la sola differenza tra la statistica classica e quantistica, esiste

infatti una diversa modalità di conteggiare il numero degli stati assunti dal sistema. Supponiamo di avere due sole particelle  $a$  e  $b$  che assumono solamente due stati corrispondenti a due livelli energetici: 1 e 2. Per stato si intende la disposizione degli elementi nei diversi intervalli discreti, nel nostro caso avremo:

1	2
a b	-
a	b
b	a
-	a b

Cioè due elementi nel primo intervallo e nessuno nel secondo, un elemento nel primo ed uno nel secondo con un cambio di posizione, infine nessuno nel primo stato e tutti e due nel secondo. Quindi abbiamo quattro modi di disporre le due particelle e pertanto quattro stati accessibili, notiamo che vengono distinte le due particelle  $a$  e  $b$ , mentre non ci preoccupiamo dell'ordine che esse assumono all'interno del singolo stato. Questo se si suppone, almeno in via di principio, di poter individuare i singoli elementi, se ciò non risulta possibile allora il numero degli stati si riduce. Infatti nell'esempio precedente avremmo due elementi indistinti  $a$  ed  $a$ , per cui:

1	2
a a	-
a	a
-	a a

In sostanza solo tre stati accessibili dato che gli elementi non si possono distinguere tra loro. Se invece esiste una ulteriore restrizione, cioè che uno stato, per motivi fisici come il principio di esclusione di Pauli, può essere occupato da un solo elemento, allora tutto si riduce.

1	2
a	-
-	a

Il primo modo di procedere corrisponde alla statistica di Boltzmann, il secondo a quella di Bose ed infine il terzo alla statistica di Fermi.

## § 2 - Le partizioni ordinate.

Se abbiamo  $r$  livelli energetici:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_r$$

e vogliamo disporre  $n$  sistemi, che possiamo considerare come degli oscillatori o delle *quasi particelle*, sugli  $r$  livelli, tenendo conto dell'ordine di disposizione cioè  $n_1$  sul primo livello,  $n_2$  sul secondo e così via, occorre quindi calcolare il numero delle partizioni ordinate per ciascun

livello. Si usa l'aggettivo ordinate perché si tiene conto dell'ordine con cui si dispongono sui vari livelli, ma senza preoccuparci dell'ordine che assumono all'interno di essi, quindi entrano in gioco le combinazioni e non le disposizioni appunto perché non ci interessa l'ordine di ciascun gruppo.

Pertanto sul primo livello si dispongono  $n_1$  sistemi scelti tra gli  $n$  totali, questa operazione corrisponde al calcolo delle combinazioni di  $n$  oggetti a gruppi di  $n_1$  e quindi la possiamo eseguire nel seguente numero di modi:

$$\frac{n!}{n_1!(n - n_1)!}$$

sul secondo livello se ne possono allora disporre  $n_2$  tra gli  $n - n_1$  sistemi rimasti e questa operazione può essere eseguita in

$$\frac{(n - n_1)!}{n_1!(n - n_1 - n_2)!}$$

modi, fino ad arrivare all'ultimo livello con

$$\frac{(n - n_1 - \dots - n_{r-1})!}{n_r!(n - n_1 - \dots - n_{r-1} - n_r)!}$$

modi. Ognuno di questi si combina con tutti gli altri e per il principio fondamentale del calcolo combinatorio abbiamo:

$$\frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \frac{(n - n_1)!}{n_1!(n - n_1 - n_2)!} \dots \frac{(n - n_1 - \dots - n_{r-1})!}{n_r!(n - n_1 - \dots - n_{r-1} - n_r)!}$$

perciò, essendo  $(n - n_1 - \dots - n_{r-1} - n_r)! = (n - n)! = 1$  otteniamo il numero delle partizioni ordinate cercato:

$$\Pi = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_r!}. \quad (1)$$

Se ritorniamo all'esempio del § 1 sulla disposizione di due sistemi  $a$  e  $b$  in due livelli vediamo, applicando la precedente, che il primo stato con i due sistemi sul primo livello lo possiamo ottenere in un solo modo:  $2!/0!2! = 1$ , con i due sistemi sul secondo livello, ma nel caso di un sistema su ciascun livello otteniamo:  $2!/1!1! = 2$ , questo perché distinguiamo i due sistemi  $a$  e  $b$ .

### § 3 - La statistica di Boltzmann.

Consideriamo un gran numero di sistemi indipendenti (oscillatori o quasi particelle) in equilibrio statistico con una sorgente che abbia energia media  $T$ , in modo tale che  $n_1$  si trovi sul livello  $\varepsilon_1$ ,  $n_2$  su  $\varepsilon_2$ , e  $n_r$  su  $\varepsilon_r$ . Questa distribuzione su livelli discreti la possiamo avere nel caso di energia quantizzata, ma anche in modo classico suddividendo l'energia totale in un numero finito di intervalli ottenendo quindi lo stesso risultato.

Tra le molte ripartizioni che i sistemi possono assumere sui vari livelli energetici, ci proponiamo di calcolare la ripartizione più probabile e quindi quella che si presenta con maggior frequenza in natura. Per precisare ulteriormente dato un sistema in equilibrio con una sorgente con energia media  $T$  e che possa assumere i livelli energetici discreti:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_r,$$

ci chiediamo quale sia la probabilità che uno di essi si trovi su di un dato livello  $\varepsilon_i$ , oppure in modo del tutto equivalente, il problema può essere impostato considerando un grandissimo numero di sistemi indipendenti tutti in equilibrio con la sorgente con energia  $T$ , ci domandiamo quale sia il numero più probabile di essi sul generico livello  $\varepsilon_i$ .

Abbiamo visto nel § precedente che il numero delle partizioni ordinate, cioè il modo di distribuire gli  $n$  sistemi sugli  $r$  livelli energetici, è dato dalla (1). Il problema fisico si riduce quindi al problema matematico della ricerca del massimo di  $\Pi$  sotto le condizioni:

$$\sum_{i=1}^r n_i = n \quad (2)$$

che esprime che il numero totale dei sistemi è uguale ad  $n$ , inoltre:

$$\sum_{i=1}^r n_i \varepsilon_i = E \quad (3)$$

cioè la loro energia totale risulta uguale ad  $E$ .

È opportuno ricorrere all'approssimazione di De Moivre-Stirling per i fattoriali, valida per  $n \geq 10$ .

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

che, trascurando il termine sotto radice<sup>1</sup>, può essere scritta in forma logaritmica:

$$\ln n! = n(\ln n - 1) \quad (4)$$

la (1) quindi assume la forma:

$$\ln \Pi = \ln n! - \sum_{i=1}^r \ln n_i! \quad (5)$$

ed applicando l'approssimazione di Stirling (4):

$$\ln \Pi = n(\ln n - 1) - \sum_{i=1}^r n_i(\ln n_i - 1) \quad (6)$$

che sviluppata fornisce la seguente relazione:

$$\ln \Pi = n \ln n - \sum_{i=1}^r n_i \ln n_i. \quad (7)$$

Occorre quindi determinare il massimo della precedente espressione sotto le condizioni (2) e (3), in modo da ottenere il numero massimo dei modi con cui il sistema si dispone su di un dato livello, cioè il massimo numero dei casi favorevoli e quindi la massima probabilità che assuma proprio quello stato.

Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cerchiamo il massimo incondizionato dell'espressione:

$$n \ln n - \sum n_i \ln n_i - \alpha \sum n_i - \beta \sum n_i \varepsilon_i$$

---

<sup>1</sup>Infatti per  $n = 1000$  il logaritmo della parte sotto radice risulta inferiore dello 0.1% rispetto ai primi termini.

quindi occorre rendere nulla la derivata:

$$\frac{\partial}{\partial n_i} (n \ln n - \sum n_i \ln n_i - \alpha \sum n_i - \beta \sum n_i \varepsilon_i) = 0,$$

e derivando rispetto ad un generico elemento della sommatoria abbiamo:

$$-\ln n_i - 1 - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0$$

da cui otteniamo il numero più probabile dei sistemi che si trovano sul livello energetico  $\varepsilon_i$ :

$$n_i = e^{-1-\alpha} e^{-\beta \varepsilon_i}.$$

La costante  $\beta$  si determina tenendo conto della relazione di Clausius, per cui  $\beta = 1/T$ , quindi, ponendo  $A = e^{-1-\alpha}$  otteniamo:

$$n_i = A e^{-\frac{\varepsilon_i}{T}} \quad (8)$$

che rappresenta la statistica classica di Boltzmann e dove  $A$  assume evidentemente il valore:

$$A = \frac{n}{\sum_j e^{-\frac{\varepsilon_j}{T}}}.$$

Quindi la (8) può essere scritta come:

$$n_i = \frac{n}{\sum_j e^{-\frac{\varepsilon_j}{T}}} e^{-\frac{\varepsilon_i}{T}}.$$



e dato che il rapporto  $n_i/n$  rappresenta la probabilità  $\Pi_i$ , abbiamo in definitiva:

$$\Pi_i = C e^{-\frac{\varepsilon_i}{T}} \quad (9)$$

dopo aver posto:

$$C = \frac{1}{\sum_j e^{-\frac{\varepsilon_j}{T}}}.$$

La distribuzione classica di Boltzmann può essere dimostrata senza l'ipotesi dei quanti e da essa è possibile ricavare la legge logaritmica di Prandtl.

Notiamo che la (8), considerando l'energia cinetica riferita all'unità di massa,  $\varepsilon_i = u_i^2/2$ , può essere scritta come:

$$\Pi_i = C e^{-\frac{u_i^2}{2T}}, \quad (10)$$

rappresenta proprio la densità di probabilità di una distribuzione di Gauss con una varianza pari a  $T$ , pertanto le fluttuazioni di velocità seguono la stessa legge come si osserva in natura.

Infatti possiamo considerare ogni fluttuazione registrata dallo strumento come il contributo del passaggio di una particella alla velocità  $u_i$ .

#### § 4 - La distribuzione canonica di Maxwell.

La statistica di Boltzmann (8) può essere utilizzata per determinare l'effettiva distribuzione dell'energia

cinetica di  $N$  particelle contenute nel volume corrispondente all'unità di massa. In una statistica classica non esiste una limitazione alla dimensione delle celle nello spazio delle fasi, perciò consideriamo lo spazio dei momenti che coincide con quello delle velocità e dividiamolo in cellette infinitesime in modo tale che il loro numero sia pari al volume. Consideriamo il volume compreso tra le due sfere di raggio  $u$  e  $u + du$  appunto perché cerchiamo il numero di particelle aventi un'energia cinetica, riferita all'unità di massa, compresa tra  $\varepsilon$  e  $\varepsilon + d\varepsilon$ . La relazione esistente tra  $\varepsilon$  e  $u$  è  $u^2 = 2\varepsilon$ , quindi:

$$du = \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon.$$

Il volume tra le due sfere considerate dello spazio dei momenti sarà:

$$4\pi u^2 du$$

pertanto, sostituendo  $du$ , il numero delle cellette diviene:

$$4\pi\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon,$$

ma in ciascuna cella vi sono  $n$  particelle in funzione dell'energia secondo la statistica di Boltzmann (8), per cui, possiamo ottenere il numero di esse contenute tra le due sfere:

$$n = 4\pi\sqrt{2}A\sqrt{\varepsilon}e^{-\varepsilon/T}d\varepsilon$$

dove  $T = u^2$ . Dato che ogni particella possiede un'energia pari ad  $\varepsilon$ , abbiamo l'intervallo infinitesimo  $dE$  di energia totale tra le sfere:

$$dE = 4\pi\sqrt{2}A\varepsilon^{3/2}e^{-\varepsilon/T}d\varepsilon. \quad (11)$$

La  $dE/d\varepsilon$  rappresenta proprio la funzione di distribuzione cioè il numero delle particelle che hanno un'energia cinetica compresa tra  $\varepsilon$  e  $\varepsilon + d\varepsilon$ .

Resta solo da calcolare la costante  $A$  e per questo imponiamo la condizione che il numero totale delle particelle sia uguale ad  $N$ , per cui abbiamo:

$$4\pi\sqrt{2}A \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} e^{-\varepsilon/T} d\varepsilon = N \quad (12)$$

ponendo  $x^2 = \varepsilon/T$  e quindi  $d\varepsilon = 2Txdx$ , l'integrale della precedente si trasforma:

$$2T^{3/2} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx.$$

Il precedente integrale vale  $\sqrt{\pi}/4$ , pertanto sostituendo questo risultato nella (12) otteniamo in definitiva:

$$A = N \left( \frac{1}{2\pi T} \right)^{3/2}.$$

Pertanto dalla (11) abbiamo la funzione  $F$  cioè la frazione delle  $N$  particelle, contenute nell'unità di massa, che hanno l'energia cinetica compresa tra  $\varepsilon$  e  $\varepsilon + d\varepsilon$ :

$$F(\varepsilon, T) = \frac{2}{\sqrt{\pi T^{3/2}}} \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/T}. \quad (13)$$

Questa distribuzione fu ricavata, sia pur con un diverso metodo, da Maxwell nel 1859 e pertanto ne porta il nome. Presenta un massimo per  $\varepsilon = 3/2T$ , ed un'energia totale che si ottiene integrando la (11), tenendo conto del valore di  $A$ :

$$E_{tot} = \frac{2N}{\sqrt{\pi T^{3/2}}} \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/T} = \frac{3}{2} NT$$

quindi abbiamo ritrovato la ben nota relazione di equipartizione dell'energia nel gas ideale.

Non esiste una ragione plausibile per cui il gas di particelle ipotizzato da Prandtl non debba seguire questa distribuzione, anzi vi sono molti motivi a suo favore, il più importante è che viene dedotta dalla statistica di Boltzmann da cui deriva, come vedremo, la legge logaritmica delle velocità ampiamente verificata dalle esperienze.

Spesso la precedente distribuzione viene espressa in funzione della velocità anziché dell'energia. Infatti se abbiamo, come al solito, il volume dello spazio dei momenti:

$$4\pi u^2 du$$

pertanto il numero delle cellette contenute in questo volume sarà:

$$n = 4\pi A u^2 e^{-\frac{u^2}{2T}} du.$$

Per calcolare la costante  $A$  ricorriamo sempre alla condizione che impone il numero totale delle particelle:

$$4\pi A \int_0^\infty u^2 e^{-\frac{u^2}{2T}} = N,$$

dalla quale ricaviamo:

$$A = \frac{N}{(2\pi T)^{3/2}}.$$

Allora la distribuzione di Maxwell espressa in termini di velocità diviene:

$$F(u, T) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T^{-3/2} u^2 e^{-\frac{u^2}{2T}}. \quad (14)$$

La statistica di Boltzmann, da cui deriva la distribuzione di Maxwell, è, come abbiamo visto, una statistica classica cioè dimostrabile senza l'ipotesi dei quanti, tuttavia può essere anche usata in un modo per così dire semiclassico, cioè considerando i livelli energetici discreti come risultano da una quantizzazione. Applicheremo questo criterio al calcolo dell'energia media dell'oscillatore armonico quantizzato.

#### § 5 - L'energia media dell'oscillatore quantizzato.

Abbiamo visto come l'energia di un oscillatore quantistico sia distribuita su livelli discreti:

$$\varepsilon_n = k\omega \left( \frac{1}{2} + n \right),$$

dove  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Però nelle applicazioni statistiche è opportuno contare l'energia a partire dal livello fondamentale. Quindi sottraendo  $k\omega/2$  da ambo i membri della precedente otteniamo:

$$\varepsilon_n = k\omega n \quad (15)$$

con  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Questi livelli possono essere introdotti nella distribuzione di Boltzmann per determinare la probabilità  $\Pi_n$  che un oscillatore assuma lo stato  $n$ . Per la statistica di Boltzmann abbiamo:

$$\Pi_n = \frac{e^{-\frac{k\omega}{T}n}}{\sum_j e^{-\frac{k\omega}{T}j}} \quad (16)$$

La serie al denominatore non è altro che una serie geometrica di ragione  $e^{-k\omega/T}$  per cui la somma dei suoi infiniti termini è:

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{k\omega}{T}j} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{k\omega}{T}}} \quad (17)$$

che introdotta nella (16) fornisce la probabilità  $\Pi_n$  che un oscillatore assuma lo stato  $n$  e quindi si trovi sul livello energetico  $\varepsilon_n$ :

$$\Pi_n = \left( 1 - e^{-\frac{k\omega}{T}} \right) e^{-\frac{k\omega}{T}n} \quad (18)$$

Nell'ipotesi che  $k\omega = T$  cioè che la sorgente con cui gli oscillatori sono in contatto fornisca proprio un quanto d'energia, possiamo valutare, con la precedente, la probabilità dei singoli stati ammissibili. Per  $n = 0$  otteniamo  $\Pi_0 = (1 - e^{-1}) = 0.63$ ;  $\Pi_1 = 0.23$ ;  $\Pi_2 = 0.085$ ;  $\Pi_3 = 0.031 \dots$  ecc.

Quindi se abbiamo una popolazione di oscillatori tra loro indipendenti, il 63% di essi assume lo stato fondamentale, il 23% il primo stato, solo l'8.5% il secondo e così via a decrescere molto rapidamente, pertanto si giustifica l'attributo di fondamentale per lo stato  $n = 0$ . Ora un oscillatore può in generale assumere diversi stati quantici ed i corrispondenti livelli energetici, ci chiediamo quale sia la sua energia media  $\varepsilon$ .

Per questo occorre valutare la media ponderata usando come pesi le stesse probabilità:

$$\varepsilon = \frac{\Pi_0\varepsilon_0 + \Pi_1\varepsilon_1 + \Pi_2\varepsilon_2 + \dots}{\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \dots}.$$

Si badi bene adesso l'energia media  $\varepsilon$  non sarà più quantizzata, come nella (15), perché la otterremo da una media ponderata e quindi avremo in definitiva dei valori continui.

Per calcolare tale media, dato che il denominatore della precedente risulta uguale ad uno, possiamo scrivere per la (18):

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \Pi_n = \left(1 - e^{-\frac{k\omega}{T}}\right) k\omega \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{k\omega}{T}n}. \quad (19)$$

Per calcolare la somma della serie al secondo membro ricordiamo la (17) scritta cambiando l'indice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{k\omega}{T}n} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{k\omega}{T}}}$$

derivando ambo i membri rispetto ad  $\omega$  otteniamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{k\omega}{T}n} = \frac{e^{-\frac{k\omega}{T}}}{\left(1 - e^{-\frac{k\omega}{T}}\right)^2} \quad (20)$$

che sostituita nella (19) fornisce in definitiva l'energia media dell'oscillatore:

$$\varepsilon = \frac{k\omega}{e^{\frac{k\omega}{T}} \left(1 - e^{-\frac{k\omega}{T}}\right)} = \frac{k\omega}{e^{\frac{k\omega}{T}} - 1}. \quad (21)$$

A questa adesso dobbiamo aggiungere di nuovo l'energia dello stato fondamentale  $k\omega/2$ :

$$\varepsilon = \frac{k\omega}{e^{\frac{k\omega}{T}} - 1} + \frac{1}{2}k\omega. \quad (22)$$

Sappiamo che l'energia media, cinetica e potenziale, di un oscillatore classico sono rispettivamente uguali a  $T/2$ , per cui l'energia media totale di un oscillatore classico vale  $\varepsilon = T$ . Nel capitolo 5 vedremo che la (22) ha la stessa pendenza della relazione classica per alti valori di  $T$  a partire all'incirca da  $k\omega/T = 1$ , cioè quando la sorgente fornisce un quanto d'energia.

Quindi proprio per  $k\omega/T = 1$  l'oscillatore si trova in condizioni critiche e, per mezzo della (21) è possibile,



come abbiamo visto nel capitolo precedente, calcolare i valori critici del numero di Reynolds e di Strouhal nel distacco dei vortici, per valori maggiori l'oscillatore assume invece un comportamento classico. Infatti notiamo che la (21) si riduce a  $\varepsilon = T$  se il quanto d'energia diviene trascurabile, cioè  $k\omega \rightarrow 0$ , come si può facilmente verificare applicando la regola dell'Hospital.

Nel capitolo 5 vedremo come la (22) possa essere resa in forma adimensionale e come sia in ottimo accordo con i risultati ottenuti da un'estesa sperimentazione.

### § 6 - La Statistica di Bose Einstein.

Nella statistica di Boltzmann le particelle vengono individuate e quando per esempio si esegue la partizione ordinata di 4 particelle su 2 livelli, lo stato (1,3) cioè una particella sul primo livello e 3 sul secondo, presenta  $4!/1!3!$ , cioè 4 modi, infatti se individuiamo le particelle con i numeri da 1 a 4 si ottiene:

$$\begin{array}{l} | 1 | \quad | 2 3 4 | \\ | 2 | \quad | 1 3 4 | \\ | 3 | \quad | 1 2 4 | \\ | 4 | \quad | 1 2 3 | \end{array}$$

Pertanto le modalità di ogni singolo stato sono molte perché, anche se in pratica non possiamo tenerne conto, in teoria le particelle sono distinte. Se però le consideriamo indistinguibili anche in via di principio allora

otteniamo un'unica modalità per lo stato (1,3), cioè il loro numero si riduce, infatti abbiamo:

$$| o | ooo |$$

Quindi per una certa energia abbiamo  $Q_i$  livelli energetici e  $n_i$  particelle da distribuire su di essi, per esempio per 4 particelle e 2 livelli gli stati saranno 5, cioè: (4,0), (3,1), (2,2), (1,3), (0,4). Per cercare una regola generale osserviamo che, per esempio lo stato (3,1) si ottiene da (4,0) con uno spostamento del tratto divisorio:

$$| oooo | \quad | \rightarrow | ooo | o |$$

Notiamo che occorre operare una permutazione tra le sbarrette che rappresentano i livelli energetici ed i cerchietti che indicano invece le particelle. Le permutazioni di 5 oggetti, 4 particelle ed un livello, dovrebbero essere  $5!$ , ma il loro numero si riduce perché le particelle sono identiche e  $4!$  permutazioni non hanno senso, quindi bisogna dividere per  $4!$  e  $1!$  per tener conto dei livelli, in sostanza il numero degli stati risulta:

$$\Pi = \frac{5!}{1!4!} = 5$$

In generale abbiamo  $n_i$  particelle e  $Q_i - 1$  livelli energetici cioè  $(n_i + Q_i - 1)!$  permutazioni delle quali  $n_i$  per quanto riguarda le particelle e  $Q_i - 1$  per i livelli non sono significative, pertanto il numero degli stati che possono assumere gli  $n_i$  sistemi distribuiti sui  $Q_i$  livelli sarà:

$$\Pi_i = \frac{(n_i + Q_i - 1)!}{n_i!(Q_i - 1)!}. \quad (23)$$

Per determinare la distribuzione più probabile e quindi più frequente in natura occorre calcolare il massimo numero di stati sotto le condizioni:

$$\sum_i n_i = N \quad (24)$$

$$\sum_i n_i \varepsilon_i = E. \quad (25)$$

Come per la distribuzione di Boltzmann introduciamo l'approssimazione di De Moivre-Stirling, pertanto la (23) si trasforma nella seguente espressione:

$$\ln \Pi = \sum_i [(n_i + Q_i) \ln(n_i + Q_i) - n_i \ln(n_i - Q_i \ln Q_i)]$$

applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo:

$$\ln(n_i + Q_i) - \ln n_i - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0$$

da cui si trova immediatamente:

$$n_i = \frac{Q_i}{e^\alpha e^{\beta \varepsilon_i} - 1} \quad (26)$$

dove  $\beta = 1/T$ , ponendo  $A = e^\alpha$  si ottiene:

$$n_i = \frac{Q_i}{A e^{\beta \varepsilon_i} - 1} \quad (27)$$

che rappresenta la distribuzione di Bose.

Notiamo che per  $A e^{\varepsilon/T} \gg 1$  la precedente si riduce alla statistica classica di Boltzmann ed inoltre quando il numero delle particelle non si conserva viene meno la condizione (24), pertanto abbiamo  $\alpha = 0$  e di conseguenza  $A = 1$ .

§ 7 - Il gas di Bose delle quasi particelle.

La più importante applicazione della statistica di Bose è la deduzione degli spettri delle oscillazioni nello strato limite viscoso senza nessuna considerazione di carattere ondulatorio.

Consideriamo infatti delle quasi particelle quantistiche che possiedono l'energia  $E = v^{*2}$ , dove  $v^*$  rappresenta la velocità d'attrito, ed una quantità di moto  $q$ , secondo le relazioni:  $E = Kf$ ;  $q = Kf/v^*$ , infatti se così non fosse e ponessimo  $v^{*2}/2$  otterremmo una velocità di fase pari alla metà della velocità di gruppo, il che è contrario all'ipotesi di Taylor che si suppone valida anche nello strato limite.

Occorre adesso determinare il numero dei quanti d'energia con una frequenza compresa tra  $f$  ed  $f + df$ . Per questo consideriamo lo spazio delle quantità di moto il cui volume risulta:

$$V = \frac{4}{3} \pi q^3$$

mentre il differenziale, cioè il volume compreso tra la sfera di raggio  $q$  e quella  $q + dq$ , tenendo conto che  $q = Kf/v^*$ , sarà:

$$dV = 4\pi q^2 dq = 4\pi \frac{K^3}{v^{*3}} f^2 df.$$

Consideriamo i quanti contenuti in volume unitario e dividiamo lo spazio delle fasi in cellette di ipervolume  $K^3$ , quindi nell'intervallo di frequenza  $df$  vi saranno un numero di quanti pari a:

$$\frac{8\pi}{v^{*3}} f^2 df$$

considerando anche le onde trasversali.

Applichiamo adesso la distribuzione di Bose al gas di quanti dello strato limite tenendo conto che essi vengono continuamente generati ed assorbiti, pertanto il loro numero non si conserva. Nell'introdurre quindi la (29) nella (27) consideriamo  $A=1$ , perciò otteniamo in definitiva:

$$n_i = \frac{8\pi}{v^{*3}} \frac{f^2}{e^{\frac{\epsilon_i}{T}} - 1} df \quad (28)$$

ora, dato che ogni quanto possiede un'energia  $E = Kf$  otteniamo:

$$dE = \frac{8\pi}{v^{*3}} \frac{K f^3}{e^{\frac{Kf}{T}} - 1} df \quad (29)$$

dalla quale deriva lo spettro  $e(f, T) = dE/df$ , cioè la densità di energia per unità di tempo compresa nell'intervallo  $df$ :

$$e(f, T) = \frac{8\pi}{v^{*3}} \frac{Kf^3}{e^{\frac{Kf}{T}} - 1}. \quad (30)$$

Quest'ultima non è altro che la formula di Planck dove però adesso la costante di quantizzazione vale  $K = 2550\nu$  e risulta valida per tutti i fluidi newtoniani.

Con la precedente possiamo spiegare, come vedremo, il comportamento del substrato viscoso da cui deriva la formazione dei ripples a partire dal fondo piano, inoltre, considerando come velocità di fase la celerità del suono, ci rendiamo conto di alcuni fenomeni acustici legati alla turbolenza e del potere emissivo dello strato limite.

Risulta quindi molto interessante considerare la turbolenza di parete formata da un gas di quasi particelle. Lontano dalla parete, nel cuore turbolento, dove prevalgono i fenomeni inerziali, il gas segue la distribuzione di Boltzmann dalla quale possiamo derivare la legge logaritmica di Ludwig Prandtl. Nel substrato invece segue la distribuzione di Bose Einstein ed è formato in sostanza da quanti d'energia. Lo strato limite quindi non può essere considerato tranquillo, laminare ma, poiché  $T$  sarà sempre maggiore di zero, avremo uno spettro continuo di oscillazioni distribuite su di una vasta gamma di frequenze.