

## Capitolo IV

### I pacchetti di onde come quasi particelle

#### § 1. - Il gas delle quasi particelle.

Abbandoniamo adesso la transizione alla turbolenza e la natura quantistica per considerare soltanto il moto lontano dalle pareti, ad alti numeri di Reynolds, dove le forze d'inerzia sono di gran lunga maggiori di quelle viscosi. Ne deriva una concezione cinetica della turbolenza simile a quella ipotizzata da Daniele Bernoulli nel suo trattato *Hydrodynamica* del 1738.

Pertanto una fluttuazione di velocità può essere assimilata ad un pacchetto d'onde trascinato dalla corrente, se questo poi ha delle dimensioni contenute va considerato quasi come una particella con una certa quantità di moto ed una determinata energia cinetica. Un insieme numeroso di queste quasi particelle costituisce una sorta di gas, però a differenza dei gas ordinari non esiste un'interazione elastica bensì anelastica. Una particella infatti cede la quantità di moto ad un'altra mescolandosi con essa e perdendo così la propria identità. Ognuna di esse avrà la propria traiettoria secondo le leggi della dinamica. Noi però non studieremo il moto di ogni sin-

gola particella, ma porremo l'attenzione sulle proprietà statistiche di questa *specie* di gas.

In un volume  $V$  contenente  $N$  quasi particelle la pressione  $p$  e l'energia cinetica per unità di massa  $T/2 = u^2/2$  seguirà la legge dei gas:

$$pV = NT \quad (1)$$

e la statistica di Boltzmann:

$$\Pi = Ce^{\varepsilon/T}.$$

Pertanto, per  $N$  particelle, possiamo scrivere la precedente, a meno di una costante, nella forma:

$$\frac{\varepsilon}{T} = N \ln \Pi.$$

Il primo membro non è altro che la definizione di entropia  $S$  e quindi otteniamo la definizione di questa grandezza nell'accezione di Boltzmann:

$$S = N \ln \Pi. \quad (2)$$

Da quest'ultima è possibile derivare il profilo di velocità lungo una parete e determinare quindi la legge di Prandtl.

## § 2 - La distribuzione delle velocità.

La distribuzione della velocità, media nel tempo, di un fluido che scorre in moto turbolento lungo una parete, potrebbe sembrare, a prima vista, come un problema

molto complicato da affrontare, ma le considerazioni dei paragrafi precedenti consentono invece una rapida e semplice soluzione. L'ipotesi di Prantl sull'esistenza all'interno del fluido di una sorta di gas è stata infatti puntualizzata analizzandone la dinamica statistica. Vicino alla parete si devono infatti formare dei piccolissimi vortici per effetto della tensione tangenziale  $\tau$  per poi diffondersi nella massa fluida mescolandosi con altri e perdendo così la propria identità, questi vortici, che sono registrati da uno strumento come pacchetti d'onda, possono essere assimilati a delle quasi particelle ognuna delle quali da un contributo all'insieme delle fluttuazioni.

La diffusione è in realtà una espansione, infatti la loro concentrazione  $n$  diminuisce man mano che aumenta la distanza  $y$  dalla parete. Il cammino libero medio  $\ell$  risulta, com'è noto, inversamente proporzionale alla concentrazione ed alla sezione d'urto  $\sigma$  che consideriamo costante con  $y$ :

$$\ell = \frac{\text{cost.}}{n\sigma} \quad (3)$$

ma  $n = N/V$  e prendendo in considerazione un'area unitaria abbiamo  $n = N/y$ , per cui sostituendo nella precedente avremo:

$$\ell = \kappa y \quad (4)$$

ed il cammino libero medio risulta proporzionale alla distanza dalla parete come ipotizzato da Prandtl. La costante di Von Karman vale circa 0.4, vedremo che può

essere prevista teoricamente per mezzo della teoria cinetica. Il gas di quasi particelle formatosi vicino alla parete a distanza  $y_o$  subisce un'espansione arrivando alla distanza  $y$  dove abbiamo una velocità media  $u$ , quindi produce, in un tempo  $t$ , un lavoro  $L = \tau ut$ . Inoltre segue la statistica di Boltzmann, pertanto possiamo scrivere, considerando il salto entropico  $\Delta S$ :

$$L = T\Delta S = NT \ln \Pi.$$

Per un gas il numero degli stati accessibili risulta proporzionale al volume e per un'area unitaria abbiamo  $\Pi = y$ , supponendo inoltre la tensione tangenziale  $\tau$  costante con  $y$ , avremo:

$$\tau u = T\Delta S = \frac{NT}{t} \ln \frac{y}{y_o}$$

ma per la (1)  $NT = py_o$  otteniamo:

$$\tau u = p \frac{y_o}{t} \ln \frac{y}{y_o}$$

inoltre  $\tau = p = \rho v^{*2}$  e tenendo conto che  $y_o = \ell_o/\kappa$  e che la velocità d'attrito  $v^* = \ell_o/t$  otteniamo in definitiva la legge di Prandtl:

$$u = \frac{v^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_o}. \quad (5)$$

Quindi il logaritmo presente nella legge di Prandtl ha un significato più profondo perché risulta legato al

salto entropico ed al lavoro prodotto dall'espansione del gas di quasi particelle formatosi alla parete.

L'aver messo in relazione l'entropia nell'accezione di Boltzmann con il profilo della velocità risulta concettualmente molto importante. Infatti per l'aumentare dell'entropia il disordine cresce con  $y$  in modo che l'effetto dell'azione ordinata contraria al moto, prodotta dalla parete diminuisce perché i moti delle quasi particelle si fanno sempre più disordinati e non esercitano un'azione frenante in quanto la componente della quantità di moto in direzione  $x$  diviene uguale a quella in direzione  $y$ , la velocità media allora non risente più dell'effetto della parete e diviene costante. Il gas viene prodotto in vicinanza della parete dove si trova una sorgente di energia media riferita all'unità di massa  $T = v^{*2}$ , il sistema risulta aperto in quanto le particelle vengono continuamente prodotte e distrutte.

Dalla relazione (5) otteniamo i due profili di velocità nel caso di parete liscia o scabra. Nel primo caso dalle misure sperimentali di Nikuradse sappiamo che per una parete liscia:

$$y_o = \frac{1}{9} \frac{\nu}{v_o^*}$$

per cui:

$$\frac{u}{v_o^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yv^*}{\nu} + 5.5. \quad (6)$$

Nel caso della parete scabra invece risulta che:

$$y_o = \frac{k_s}{30}$$

dove  $k_s$  rappresenta la scabrezza di sabbia equivalente, pertanto abbiamo:

$$\frac{u}{v_o^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} + 8.5. \quad (7)$$

Dalle precedenti si possono ricavare le leggi della resistenza al moto per una corrente turbolenta.

### § 3 - Le resistenze al moto.

Una corrente turbolenta che scorre in un condotto con raggio idraulico  $R$  incontra, com'è noto, una resistenza unitaria  $\tau$  pari a:

$$\tau = \gamma R J \quad (8)$$

dove la pendenza della linea dell'energia  $J$  è data dalla relazione di Darcy, in cui  $U$  rappresenta la velocità media della corrente e  $\lambda$  il coefficiente d'attrito:

$$J = \frac{\lambda}{4R} \frac{U^2}{2g}. \quad (9)$$

L'energia dissipata infatti non può che essere funzione dell'energia cinetica in quanto quella potenziale si conserva.

Dalla (8) possiamo ricavare la velocità d'attrito:

$$v^* = \sqrt{g R J} \quad (10)$$

e per la (9) otteniamo:

$$\frac{U}{v^*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}. \quad (11)$$

Quindi il coefficiente d'attrito dipende dal quadrato del rapporto tra la velocità d'attrito e la velocità media. Quest'ultima viene valutata dalla effettiva distribuzione di velocità, integrando infatti la (6) per condotti circolari con pareti lisce otteniamo la  $U$  e, per mezzo della (9) il corrispondente coefficiente d'attrito, otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.03 \log \frac{2.83}{R_e \sqrt{\lambda}}.$$

Nikuradse stesso ha suggerito di variarne leggermente i coefficienti per una migliore aderenza ai dati sperimentali ed ha proposto:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}}$$

Nel caso di pareti scabre, sempre per condotte circolari, la velocità media viene ottenuta integrando la (7), pertanto in definitiva possiamo scrivere:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{k_s}{3.71D}.$$

Le precedenti valgono per una sezione circolare, per sezioni forma diversa Marchi ha dimostrato l'esistenza di un coefficiente di forma il cui valore varia da 0.8 a 0.9,

la sua influenza però risulta alquanto modesta per il fatto che è inserito nell'argomento di un logaritmo. Infatti le quasi particelle prodotte vicino alla parete si espandono nella massa fluida in modo disordinato e quindi con una scarsa influenza della forma della sezione. Pertanto la distribuzione logaritmica delle velocità può essere considerata valida praticamente per qualsiasi forma.

Colebrook e White infine hanno proposto una combinazione delle precedenti per i condotti commerciali:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} + \frac{k_s}{3.71D} \right).$$

Per le forme diverse dalla circolare con un raggio idraulico  $R$  è sufficiente, com'è noto, sostituire  $4R$  in luogo di  $D$ .

In definitiva occorre notare che tutte queste relazioni logaritmiche derivano dalla distribuzione di velocità che a sua volta è legata al salto entropico e quindi al lavoro prodotto dall'espansione del gas di quasi particelle, ipotizzate per la prima volta da Prandtl, pertanto le resistenze al moto confermano ulteriormente le sue ipotesi. Quindi occorre puntualizzare ulteriormente il modello di Prandtl alla luce della teoria cinetica.

#### § 4 - L'equazione di sopravvivenza.

Ci proponiamo di determinare la legge di distribuzione della lunghezza di mescolamento. Per questo consideriamo le  $N_o$  quasi particelle che si formano alla parete, di



dimensioni quindi molto piccole, dell'ordine di grandezza dello strato limite. Esse, mantenendo la loro grandezza, ma inglobate in strutture vorticoso molto più grandi, dell'ordine di  $y$ , si diffonderanno fino alla distanza generica  $y$ , dove ne giungeranno solo  $N < N_o$  perché alcune perderanno la loro identità mescolandosi con altre. Se indichiamo con  $P$  la probabilità di mescolamento, nel tratto compreso tra  $y$  e  $y + dy$  si perderanno  $dN$  particelle:

$$dN = -PNdy$$

dove il segno negativo indica appunto una diminuzione. Scrivendo la precedente nella seguente forma:

$$\frac{dN}{N} = -Pdy$$

ed integrando otteniamo:

$$\ln N = -Py + cost.$$

La costante di integrazione si determina immediatamente tenendo conto del numero iniziale  $N_o$  delle quasi particelle che sono partite dalla parete, per cui:

$$N = N_o e^{-Py}$$

La probabilità di perdita di identità  $P$  viene ricavata ricorrendo alla definizione di lunghezza di mescolamento  $\ell$  ed al differenziale della precedente:

$$\ell = \frac{1}{N_o} \int_0^\infty y dN = \frac{1}{N_o} \int_0^\infty y P N_o e^{-Py} dy = \frac{1}{P}$$

per cui in definitiva otteniamo:

$$\frac{N}{N_o} = e^{-\frac{y}{\ell}} \quad (12)$$

che indica proprio la frazione di particelle che arrivano alla distanza  $y$  sopravvivendo ai mescolamenti e quindi per questo viene chiamata: equazione di sopravvivenza.

#### § 5 - La costante di Von Karman.

La lunghezza di mescolamento analoga al cammino libero medio nella teoria cinetica dei gas, che, com'è noto, è dato da:

$$\ell = \frac{1}{n\sigma}$$

dove  $n$  indica la concentrazione e  $\sigma$  la sezione d'urto della particella considerata nel caso che tutte le altre siano ferme. Clausius ha invece tenuto conto del moto relativo attribuendo a tutte la stessa velocità media ottenendo:

$$\ell = \frac{3}{4n\sigma}. \quad (13)$$

Infine Maxwell ha introdotto la distribuzione statistica delle velocità arrivando alla seguente espressione:

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}. \quad (14)$$

Ora, se applichiamo questi risultati alle nostre quasi particelle dobbiamo tener conto che esse vengono generate alla parete e trascinate dai grandi vortici presenti nella corrente, quindi uno strato di spessore  $y$  viene aggredito dall'alto e dal basso dalle particelle incidenti, consideriamo inoltre una particella generica che spazza con la sua sezione d'urto un volume  $\sigma y/2$  dove esistono  $n\sigma y/2$  particelle bersaglio.

La probabilità sarà quindi data per definizione dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento ed il numero totale di casi possibili, ora il numero dei casi favorevoli è rappresentato dai bersagli compresi nel volume spazzato da una sezione d'urto cioè  $Nn\sigma y/2$ . Il numero dei casi possibili risulta invece pari al numero totale delle particelle incidenti, cioè  $N$ , quindi in definitiva otteniamo:

$$P = \frac{1}{2}n\sigma y.$$

Sostituendo il prodotto  $n\sigma$  ricavato da quest'ultima rispettivamente nelle (13) e (14) otteniamo:

$$\ell = \frac{3}{8P}y \quad (15)$$

$$\ell = \frac{1}{2\sqrt{2}P}y \quad (16)$$

per cui la costante di proporzionalità fra  $\ell$  ed  $y$ , detta costante di Von Karman diviene rispettivamente:

$$\kappa = \frac{3}{8P} \quad (17)$$

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}P}. \quad (18)$$

Il valore della costante di Von Karman dipende quindi dalla probabilità di mescolamento  $P$ , che può essere calcolata tramite l'equazione di sopravvivenza (12) scritta in questa forma:

$$\frac{N}{N_o} = e^{-\frac{1}{\kappa}} \quad (19)$$

dove  $N/N_o$  rappresenta la probabilità di sopravvivenza ed è quindi pari a  $1 - P$  per cui, sostituendo nella precedente i valori di  $\kappa$  ricavati dalle (17) e (18), arriviamo alle seguenti equazioni:

$$1 - P = e^{-\frac{8}{3}P}$$

$$1 - P = e^{-2\sqrt{2}P}.$$

Esse sono soddisfatte rispettivamente per  $P = 0.912$  e  $P = 0.927$ , cioè più del 90% di quasi particelle perdono la loro identità e ne sopravvivono solamente circa il 7%.

Questi risultati, inseriti nelle (17) e (18), consentono di determinare il valore teorico della costante di Von Karman, infatti otteniamo per la relazione di Clausius e di Maxwell rispettivamente:

$$\kappa = 0.411$$

$$\kappa = 0.381$$

valori come vediamo molto vicini al dato sperimentale di 0.4.

Tutto ciò suscita un grande stupore e fa pensare alla potenza della teoria cinetica ed alla validità del modello corpuscolare proposto da Daniele Bernoulli, ripreso da Ludwig Prandtl e qui maggiormente puntualizzato.

#### § 6 - La lunghezza di mescolamento.

Nikuradse nelle sue classiche esperienze aveva scoperto che la lunghezza di mescolamento risultava proporzionale alla distanza dalla parete solo in vicinanza di questa, per assumere un diverso andamento all'aumentare di  $y$ .

Indicando con  $h$  lo spessore dello strato limite turbolento, notiamo infatti che la proporzionalità può essere ritenuta valida fino ad un valore del rapporto  $y/h$  pari a circa 0.1, dopo di che i valori sperimentali si dispongono su di una curva esponenziale.

Per spiegare questo fatto secondo le considerazioni del § precedente formuliamo l'ipotesi che le quasi particelle non si formino solo alla parete ma anche a distanza da questa per effetto del gradiente di velocità. Infatti la probabilità di mescolamento è inversamente proporzionale alla concentrazione e se questa aumenta con

$y$  allora la lunghezza di mescolamento, per le (15) e (16), non seguirà più un andamento lineare.

Pertanto consideriamo alla parete  $N_o$  particelle ed alla distanza  $h$ , cioè per tutto lo spessore dello strato, un numero maggiore di esse pari a  $N > N_o$ , quindi l'aumento  $dN$  fra la distanza  $y$  e  $y + dy$  sarà:

$$dN = \alpha N dy \quad (20)$$

dove  $\alpha$  rappresenta il tasso di crescita, costante con  $y$ .

Separando le variabili ed integrando:

$$\int_{N_o}^N \frac{dN}{N} = \alpha \int_0^y dy$$

da cui otteniamo:

$$\frac{N}{N_o} = e^{\alpha y}. \quad (21)$$

L'accordo con i dati sperimentali di Nikuradse l'abbiamo solo se il tasso di crescita viene assunto pari ad  $\alpha = 1/h$ , cioè dalla precedente quando  $N/N_o = e$ , quindi per effetto del gradiente di velocità il numero delle particelle aumenta di più di due volte<sup>1</sup>.

Con questo tasso di crescita la (21) assume la forma:

$$N = N_o e^{\frac{y}{h}}$$

---

<sup>1</sup>Lo stesso risultato viene ottenuto dalla (20) in forma finita:  $\Delta N = \alpha N h$ , ipotizzando il raddoppio delle particelle durante il percorso, cioè  $\Delta N = N$ , per cui  $\alpha = 1/h$ .

e riferendoci all'unità di volume la concentrazione sarà:

$$n = n_o e^{\frac{y}{h}}$$

sostituendo la precedente nella espressione del cammino libero medio fornita da Maxwell otteniamo:

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n_o} y e^{-\frac{y}{h}}.$$

Ma il prodotto  $\sigma n_o$  risulta uguale a  $2P_o/y$  come abbiamo visto nel § 5, dove  $P_o$  rappresenta ora la probabilità di mescolamento in vicinanza della parete, quindi:

$$\ell = \frac{1}{2\sqrt{2}P_o} y e^{-\frac{y}{h}}.$$

oppure per la (18):

$$\ell = \kappa y e^{-\frac{y}{h}} \quad (22)$$

che risulta in ottimo accordo con i dati di Nikuradse proprio per il valore di  $\kappa = 0.381$  ricavato partendo dall'espressione di Maxwell.

L'espressione (22), presentata da Marchi con considerazioni empiriche, alla luce del modello corpuscolare della turbolenza acquista un significato ben preciso, cioè implica una formazione di quasi particelle anche nel corpo della corrente e non solo in vicinanza della parete.

## § 7 - La correzione di Marchi.

La distribuzione logaritmica delle velocità di Prandtl presenta un punto angoloso per il massimo valore per il fatto che la derivata dell'espressione (5) decresce con  $y$  ma non si può mai annullare. Questo insieme al fatto che i dati sperimentali deviano leggermente dalla legge logaritmica ha indotto molti autori tra cui il Marchi a proporre una correzione a questa legge.

L'autore ha infatti inserito nella derivata della (5) il valore effettivo della tensione tangenziale:

$$\tau = \tau_o(1 - z)$$

dove  $z = y/h$ , e quindi della reale velocità d'attrito essendo  $\tau_o = \rho v_o^{*2}$ :

$$v^* = v_o^* \sqrt{1 - z}.$$

Inoltre ha tenuto conto della relazione (22) del § precedente per cui in definitiva il differenziale dell'equazione di Prandtl si trasforma nella seguente espressione:

$$du = \frac{v_o^* e^z \sqrt{1 - z}}{\kappa z} dz.$$

Adesso per  $y = h$ , cioè  $z = 1$ , la derivata si annulla ed il punto angoloso scompare.

Aggiungendo e sottraendo nel secondo membro della precedente il rapporto:



$$\frac{1}{\kappa} \frac{dz}{z}$$

ed integrando si ottiene:

$$\frac{u}{v_o^*} = \frac{u_{max}}{v_o^*} + \frac{1}{\kappa} \ln z + \frac{1}{\kappa} \int_1^z \frac{e^z \sqrt{1-z} - 1}{z} dz. \quad (23)$$

L'integrale è stato risolto numericamente dal Marchi stesso e, diviso per la costante di Von Karman costituisce la correzione da apportare alla legge logaritmica di Prandtl.

Si tratta però di una correzione di piccola entità e che quindi può essere tranquillamente trascurata, come afferma lo stesso autore, quando si integra il profilo di velocità per determinare la legge di resistenza al moto.

Tuttavia la correzione di Marchi, alla luce di quanto esposto in precedenza, perde il significato empirico originario per acquistarne uno più profondo legato alla teoria cinetica del gas di quasi particelle. Per questo tale correzione quindi supera di gran lunga quella proposta da Coles ed universalmente accettata ma dedotta in modo esclusivamente empirico.

In figura (Fig. 1) viene rappresentata la correzione alla legge del salto di velocità. Tale correzione è in ottimo accordo con i dati sperimentali anche se la differenza con la legge di Prandtl risulta alquanto modesta.

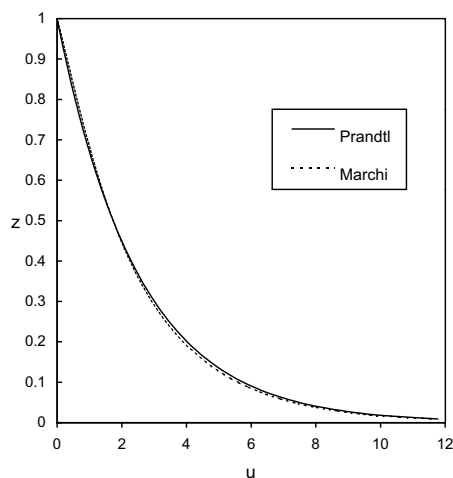


Figura 1: Il profilo logaritmico di Prandtl nella forma: *salto di velocità*. La correzione introdotta da Marchi risulta trascurabile. In ascissa:  $u = (u_{max} - u)/v_o^*$ .

### § 8 - Il getto libero.

Qualcuno potrebbe obiettare che tutto ciò che è stato esposto nei § precedenti sia solo una costruzione ad hoc introdotta soltanto per spiegare la distribuzione logaritmica delle velocità, sia quindi una *adocaggine* come afferma il De Finetti, invece il modello corpuscolare proposto può essere impiegato per studiare il getto libero, cioè un moto turbolento molto diverso da una corrente che scorre lungo una parete.

Se consideriamo infatti un gran numero di particelle

che escono da un orifizio e si sparpagliano come i pallini di un fucile da caccia, all'arrivo sul bersaglio ci dobbiamo aspettare una distribuzione casuale e precisamente una distribuzione di Gauss proprio per le molteplici cause che influenzano la traiettoria di ciascuna particella.

Nel caso di un getto turbolento avremo una sorta di gas costituito da quasi particelle che escono da in orifizio e ciascuna di esse seguirà una sua traiettoria alquanto complicata, ma certamente la probabilità di trovarne una sarà maggiore sull'asse del getto e minima ai confini del getto stesso, con una distribuzione gaussiana.

Ciascuna particella trasporta una certa quantità di moto e quindi nella regione dove ne arrivano di più avremo una maggiore velocità media. In sostanza se è vera l'ipotesi di Prandtl sull'esistenza di molte particelle disperse nel fluido allora la velocità media di un getto libero dovrebbe anch'essa essere distribuita secondo una classica distribuzione di Gauss. Questa quindi assume la forma:

$$u(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (24)$$

dove  $r = x - \mu$ ,  $\mu$  rappresenta il valor medio e  $\sigma^2$  la varianza. Sull'asse del getto abbiamo quindi il massimo della funzione:

$$u_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (25)$$

per cui il rapporto tra la generica velocità e quella massima sarà:

$$\frac{u}{u_{max}} = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}. \quad (26)$$

Moltissime misure eseguite sui getti liberi mostrano proprio la distribuzione delle velocità medie con la classica forma a campana. Anche in questo Istituto di Idraulica di Pisa sono state eseguite delle esperienze su di un getto d'aria di forma circolare con un diametro di 12 mm, ottenendo sempre una distribuzione gaussiana. Il modello corpuscolare risulta quindi valido anche per un moto completamente diverso da quello esistente lungo una parete, in accordo con Prandtl.

Però il getto libero non ha una forma cilindrica, ma diverge a forma di cono con un angolo di semi apertura pari ad  $\alpha$ . La teoria corpuscolare non può prevedere questo risultato a differenza invece del modello ondulatorio: ponendo infatti:  $\sin \alpha = \lambda/d$ . Questa relazione rappresenta infatti la legge di diffrazione di un'onda attorno ad un ostacolo. È logico a questo punto assumere la lunghezza dell'onda che esce dall'orifizio pari alla lunghezza di mescolamento  $\ell = \kappa d/2$  per cui dalla precedente avremo:  $\sin \alpha = \kappa/2 = 0.2$  e quindi  $\alpha \simeq 11^\circ$  in ottimo accordo con l'esperienza. Pertanto i modelli corpuscolare ed ondulatorio spiegano completamente la realtà del getto libero.