

Capitolo V

La verifica sperimentale

§ 1. L'apparato sperimentale.

Per verificare sperimentalmente il distacco dei vortici in condizioni subcritiche è stato approntato presso l'Istituto di Idraulica dell'Università di Pisa un opportuno apparato sperimentale. Un dispositivo in grado di oscillare è stato inserito nel canale in vetro del laboratorio I dell'Istituto di Idraulica dell'Università di Pisa, largo 50 cm, lungo 9 metri ed alimentato da un serbatoio posto sulla torre piezometrica che, dotato di uno sfioratore a canalette di notevole lunghezza complessiva, è in grado di mantenere il carico costante. Nella sezione terminale esiste una paratoia, con la quale è possibile controllare con precisione il rigurgito della corrente. La turbolenza di aspetto veniva contenuta entro valori dall'1% al 3% con un pacchetto di griglie a nido d'ape poste all'inizio della zona sperimentale.

In una prima fase il dispositivo per provocare il distacco dei vortici in condizioni subcritiche era costituito da un telaio su cui veniva teso un filo con un diametro di un millimetro e veniva messo in oscillazione, alla fre-

quenza dovuta, tramite un elettromagnete che agiva su di un piccolo magnete permanente installato sul filo stesso. L'elettromagnete veniva eccitato con una corrente sinusoidale mediante un convertitore tensione-corrente controllato da un generatore di funzione.

Con questo apparato, è stata scoperta l'effettiva formazione dei vortici per numeri di Reynolds inferiori a 50. Infatti, una volta regolato il flusso e quindi la velocità di arrivo della corrente, la visualizzazione tramite idrolisi mostrava, a filo fermo, una semplice scia di bollicine d'idrogeno che si dispiegava verso valle come una bandiera. Invece, con il filo oscillante ad una frequenza opportuna, si poteva osservare, senza ombra di dubbio, la scia vorticoso trascinata a valle dalla corrente idrica (TAV. I). La velocità dell'acqua veniva misurata da un apparato LDA, mentre un vibrometro a triangolazione misurava le oscillazioni del filo.

Con questo dispositivo però non era agevole controllare l'ampiezza di oscillazione che dipendeva da quanto la frequenza era più o meno vicina a quella di risonanza. Pertanto venne progettato costruito un carrello oscillante su guide con bussole a sfera e comandato da una camma variabile azionata da un motore elettrico controllato da un'elettronica in grado di variarne la velocità di rotazione. In questo modo il filo si muoveva di conserva con il carrello alla stessa ampiezza impostata sulla camma. Mediante questo nuovo apparato, utilizzando cilindri con diametri da 0,67 a 2 mm, sono state rilevate, in tempi diversi, le frequenze che producevano il

massimo effetto. In pratica per una data velocità della corrente, per $R < 50$, si provvedeva ad eseguire una scansione dalle basse alle alte frequenze, sempre con una piccola ampiezza di oscillazione (0,12 mm), contemporaneamente il velocimetro a laser, puntato a valle del filo, rilevava la presenza dei vortici mediante il segnale di velocità ed il relativo spettro. La frequenza f_m che provocava il massimo dello spettro veniva assunta come significativa. Naturalmente a questo punto se si fermava il carrello oscillante i vortici scomparivano insieme alla riga dello spettro. Si dimostrava inoltre che il fenomeno dipendeva dalla frequenza e non dalla ampiezza, infatti, sempre per piccole ampiezze, ma per frequenze molto diverse da f_m , i picchi erano assenti o poco pronunciati, centinaia di volte inferiori a quello massimo. Inoltre è da notare che non sono stati osservati vortici per $R < 25$. Le frequenze f_m così ottenute sono state elaborate in due modi diversi, come esposto nel prossimo paragrafo.

§ 2. - L'elaborazione dei dati.

In un primo momento è stata semplicemente modificata la relazione che si ottiene in condizioni critiche quando si deve fornire un *quantum* di energia per ottenere il distacco dei vortici:

$$E = kf. \quad (1)$$

Questa rappresenta la relazione fondamentale verificata sperimentalmente dove abbiamo semplicemnte pos-

to $\omega = f$. Nella Fig. 1, in ordinata abbiamo E/ν così da avere $E/\nu = 406f$ in accordo con la (1).

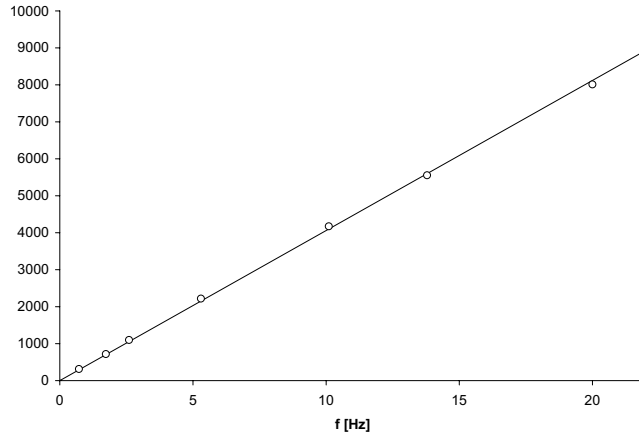


Figura 1: I risultati sperimentali in forma adimensionale a confronto con la relazione (1).

Tenendo conto del lavoro L necessario per riportare il sistema allo stato critico possiamo quindi scrivere:

$$E = kf - L. \quad (2)$$

In altri termini per avere dei vortici trascinati dalla corrente e quindi con energia media $E = U^2$ occorre fornire un *quantum* di energia diminuito del lavoro L necessario per estrarli.

Il lavoro di estrazione oppure il l'energia necessaria per riportare il sistema allo stato critico risulta essere:

$$L = (U_o - U)^2 \quad (3)$$

nella (2) f indica la frequenza f_m dove si ottiene il massimo effetto. Ovviamente, allo stato critico, la (3) si annulla e la (2) si riduce di nuovo alla (1).

I dati sperimentali sono in ottimo accordo con le relazioni (1) e (2), ed inoltre si può notare una profonda analogia tra quest'ultima e al relazione dell'effetto fotoelettrico, però adesso con la costante di quantizzazione non uguale a quella di Planck ma proporzionale alla viscosità cinematica ($k = 406\nu$).

Tuttavia, in un secondo tempo, si è preferito non apportare nessuna correzione ai dati, semplicemente i valori ottenuti per i vari diametri del cilindro sono stati resi adimensionali per poterli confrontare tutti insieme con il modello dell'oscillatore quantizzato.

Per questo occorre rendere adimensionale la (22) del capitolo 3 (dove $f = \omega$) dividendo ambo i membri per il quantum di energia kf ($T = U^2$):

$$\frac{\varepsilon}{kf} = \frac{1}{e^{\frac{kf}{T}} - 1} + \frac{1}{2}. \quad (4)$$

I dati sperimentali, sono stati quindi posti in forma adimensionale considerando i rapporti tra l'energia fornita dall'oscillatore al picco di massima energia $w = kf$, e l'energia allo stato critico kf_o . Infatti $w = \varepsilon$ può essere considerata come l'energia media dell'oscillatore, cioè l'energia da fornire al fluido, mediante le oscillazioni,

per provocare il distacco dei vortici. Anche in ascissa dobbiamo dividere l'energia cinetica T per il quanto allo stato critico $k f_o$ ottenendo così:

$$\frac{w}{k f_o} = \frac{1}{e^{\frac{k f_o}{T}} - 1} + c. \quad (5)$$

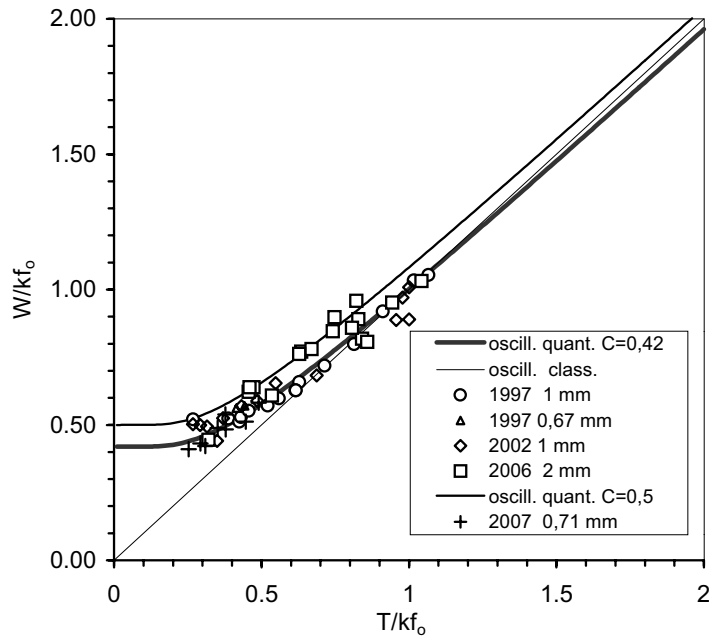


Figura 2: I risultati sperimentali in forma adimensionale a confronto con il modello dell'oscillatore quantizzato.

Ora se il fenomeno seguisse il modello dell'oscillatore classico i dati si dovrebbero allineare sulla retta inclinata, perché l'energia media dell'oscillatore sarebbe sempre uguale all'energia cinetica della sorgente con cui è in contatto: $w = T$. Questo in pratica avviene dallo stato critico in poi, cioè per $T/kf_o \geq 1$, ma per valori inferiori i dati deviano dalla retta e seguono, sia pur con una certa dispersione, la relazione (5), con un valore della costante c compreso tra 0.42 e 0.5 (quindi con $\varepsilon = kf/2$ e $\Gamma = 203\nu$). Il valore 0.42 è stato assunto per avere l'uguaglianza allo stato critico. Possiamo quindi concludere che i dati sperimentali si accordano con il modello dell'oscillatore quantizzato (Fig. 2).

§ 3. - Le statistiche della turbolenza.

Le statistiche classiche di Boltzmann, di Maxwell per quanto riguarda le velocità e quella quantistica di Bose-Einstein, trovano tutte la loro applicazione al gas di quasi particelle descritto nel capitolo IV.

Quando infatti un fluido newtoniano si trova in moto turbolento ad alti numeri di Reynolds si comporta come una sorta di gas di quasi particelle che interagiscono tra loro mescolandosi, quindi, per una turbolenza isotropa, i moduli delle velocità non possono far altro che seguire la statistica di Maxwell:

$$F(u, T) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi T^3}} u^2 e^{-\frac{u^2}{2T}} \quad (6)$$

che rappresenta la frazione delle N quasi particelle che hanno un modulo di velocità compreso tra u e $u + du$. L'energia cinetica media T è proporzionale allo scarto quadratico medio u' , cioè $T = u'^2$.

Nel caso di una sola componente di velocità la precedente si riduce a:

$$n(u, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} u^2 e^{-\frac{u^2}{2T}} \quad (7)$$

che come si può notare rappresenta una distribuzione gaussiana con varianza $\sigma^2 = T$.

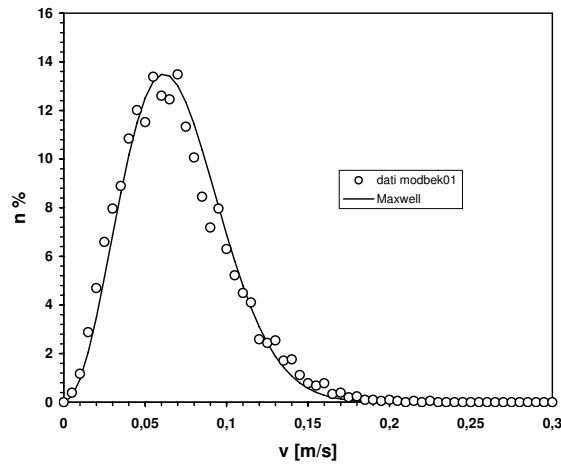


Figura 3: I moduli di velocità di una turbolenza isotropa posti a confronto con la distribuzione di Maxwell.

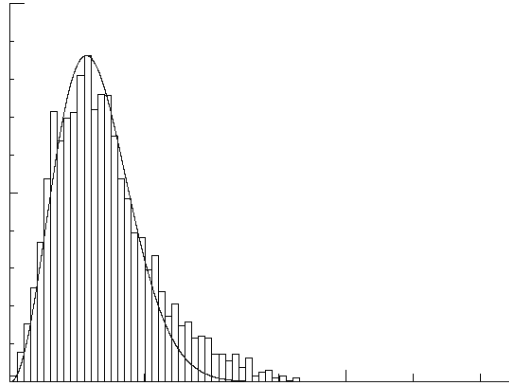


Figura 4: L'istogramma dei moduli di una turbolenza non isotropa rilevati da un ADV, sempre a confronto con la distribuzione di Maxwell.

Invece il moto turbolento a bassi numeri di Reynolds ha un comportamento quantistico e segue la statistica di Bose Einstein. In questo caso le quasi particelle sono in via di principio indistinguibili ed il conteggio degli stati viene dato dalla (27) del capitolo III, dove il numero degli stati accessibili Q_i viene adesso valutato tramite lo spazio delle fasi, diviso in cellette di volume K , per il caso ad una sola dimensione e K^3 , per le tre dimensioni. Per il primo abbiamo la distribuzione:

$$n_E(u, T) = \frac{1}{K(A e^{\frac{u^2}{2T}} - 1)}, \quad (8)$$

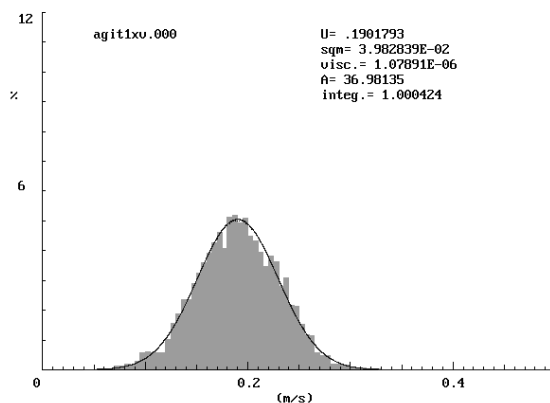


Figura 5: Per l'acqua l'istogramma di una sola componente segue la distribuzione di Maxwell che si riduce ad una gaussiana.

mentre per il caso generale:

$$F_E(u, T) = \frac{4\pi}{K^3} \frac{u^2}{A e^{\frac{u^2}{2T}} - 1}, \quad (9)$$

la costante A viene determinata con la condizione di normalizzazione ed il corrispondente integrale può essere calcolato sia numericamente che per serie di potenze.

Per verificare accuratamente le precedenti espressioni è stata usata la tecnica LDA in un agitatore magnetico usando come fluidi l'acqua, una miscela glicerina+acqua al 50% ed infine aria inseminata con piccole quantità di fumo. La viscosità è stata valutata accuratamente mediante la misura della temperatura e l'applicazione

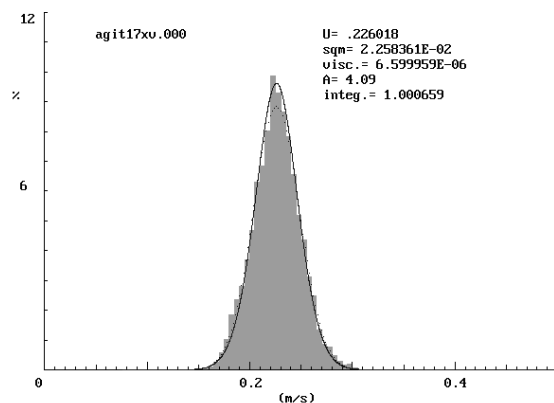


Figura 6: L'istogramma della miscela al 50% di glicerina+acqua a 12°C.

delle usuali relazioni per l'aria e l'acqua, mentre per la miscela con glicerina è stata applicata la relazione di Guzman-Andrade.

Nel caso tridimensionale in acqua notiamo come la (6), cioè la statistica dei moduli delle velocità, sia ampiamente verificata dai dati sperimentali nell'ipotesi di isotropia (Fig. 3).

D'altra parte non poteva essere altrimenti per delle strutture, delle quasi particelle disperse nel fluido secondo il modello di Prandtl, modello che, come abbiamo visto nel precedente capitolo, fornisce con esattezza la funzione logaritmica di distribuzione delle velocità lungo una parete.

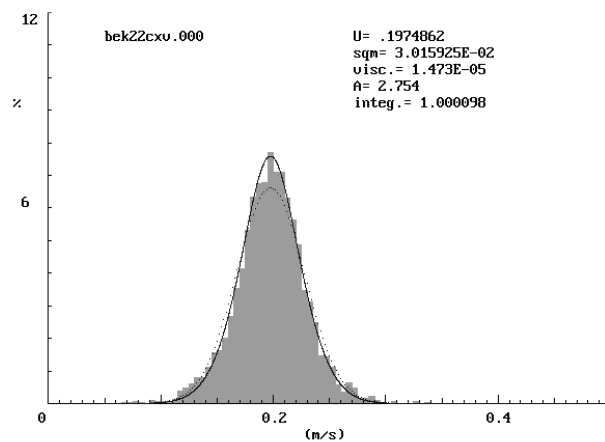


Figura 7: L'istogramma in aria a 17°C insemiata con piccole quantità di fumo.

La statistica di Bose Einstein che negli istogrammi viene indicata a tratto continuo, non si discosta molto da quella di Maxwell, rappresentata per punti. Nella zona del massimo i dati sembrano adattarsi in modo migliore alla distribuzione di Bose, tuttavia le fluttuazioni dei dati sperimentali non consentono di dare una preferenza netta, possiamo però affermare che i dati sperimentali non sono in contrasto con la statistica quantistica ad una dimensione (8).

Per quanto riguarda il caso a tre dimensioni la (9) si discosta ancora meno dalla (6) e quindi non è possibile né sensato un confronto con i risultati sperimentali.

Sembrerebbe quindi che il gas delle quasi particelle

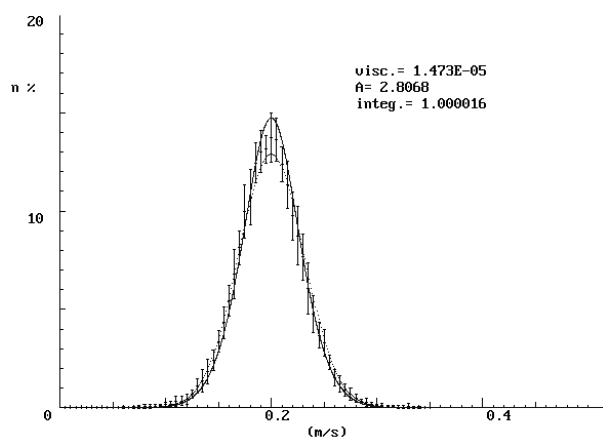


Figura 8: L'istogramma medio di 8 prove, sempre in aria a 17°C insemiata con piccole quantità di fumo.

che segue la statistica quantistica di Bose Einstein non trovi nessuna applicazione nella turbolenza dei fluidi ordinari; però le oscillazioni e le fluttuazioni presenti nello strato limite possono essere facilmente comprese mediante questa impostazione, esse conducono pertanto alla spiegazione dell'origine dei ripples.

§ 4 - L'origine dei ripples.

Nel substrato viscoso si formano delle oscillazioni che si propagano alla velocità di fase v^* lungo lo strato limite stesso, quindi, ipotizzando l'esistenza di numerose quasi particelle o quanti di energia, il loro spettro sarà semplicemente dato dalla (30) del capitolo III:

$$e(f, T) = \frac{8\pi}{v^{*3}} \frac{Kf^3}{e^{\frac{Kf}{T}} - 1}. \quad (10)$$

Per cui nel substrato si formano delle oscillazioni a largo spettro con un'energia massima corrispondente alla frequenza f_m :

$$f_m = \alpha \frac{T}{K}$$

dove $T = v^{*2}$ ed α è la radice dell'equazione:

$$(3 + \alpha) e^\alpha = 3$$

che ammette come radice $\alpha = 2.821$, per cui possiamo scrivere:

$$f_m = 2.821 \frac{T}{K}.$$

La corrispondente lunghezza d'onda λ_m è data dalla precedente ($2550/2.821 = 903.9 \simeq 904$):

$$\lambda_m = 904 \frac{v^*}{\nu}. \quad (11)$$

Tali oscillazioni, per la relazione di Newton:

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)$$

provocano un largo spettro di azioni tangenziali e quindi un fondo in sabbia fine, inizialmente piano, si deforma in

piccole onde, successivamente prevarranno quelle provocate dalle oscillazioni con maggiore energia, fino alla formazione di ripples con una lunghezza d'onda uguale al valore fornito dalla (11)(Fig. 9).

Questo meccanismo quantistico di formazione dei ripples fu ipotizzato da chi scrive alla fine degli anni settanta del secolo scorso con la (11) analoga alla relazione di De Broglie.

In quegli stessi anni si apprese con stupore che anche Yalin aveva trovato empiricamente la stessa relazione con un valore della costante pari a 2200 per i ripples pienamente sviluppati e la metà, cioè circa 1000, per quelli in fase iniziale. Ulteriori studi sperimentali, eseguiti sempre all'istituto di Idraulica di Pisa, confermarono questi valori per bassi numeri di Reynolds, e precisarono maggiormente il meccanismo di instabilità alla Helmholtz ipotizzato da Liu per alti numeri di Reynolds.

Infatti in tal modo si può facilmente dimostrare che:

$$\lambda < \frac{16\pi}{g\varphi} \frac{\rho\rho_s}{\rho_s^2 - \rho^2} v^{*2}$$

dove φ indica il coefficiente d'attrito, mentre ρ e ρ_s rispettivamente le densità dell'acqua e della sabbia. Per favorire un rapido sviluppo la sabbia veniva disposta su una lastra di vetro, si notò che la precedente relazione veniva soddisfatta per i valori più elevati delle velocità d'attrito, mentre per bassi valori i dati si disponevano sull'iperbole (11) però con la costante pari a circa 2000. Quindi, in accordo con Yalin, un valore pari alla metà,

cioè 1000 risulta corretto per i ripples in fase di formazione ed è in accordo con quello teorico derivato dallo spettro delle oscillazioni (10).

Quindi l'origine di queste formazioni di fondo non risulta più *obscure* come sostiene Yalin:

*The origin of ripples appears to be even more
obscure than that of dunes and antidunes...*

ma è semplicemente il risultato del comportamento quantistico dello strato limite ¹.

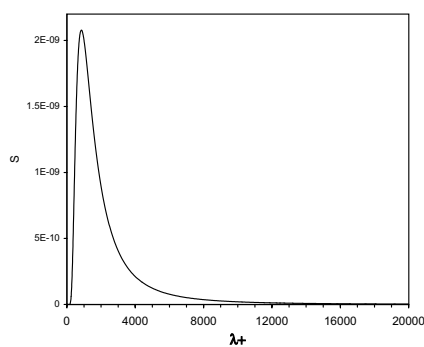


Figura 9: Lo spettro delle oscillazioni in forma adimensionale ($\lambda^+ = yv^*/\nu$) mostra un massimo pronunciato per $\lambda^+ = 904 \simeq 1000$.

¹Anche le piccole onde provocate dal vento sull'acqua potrebbero avere un meccanismo di formazione analogo.