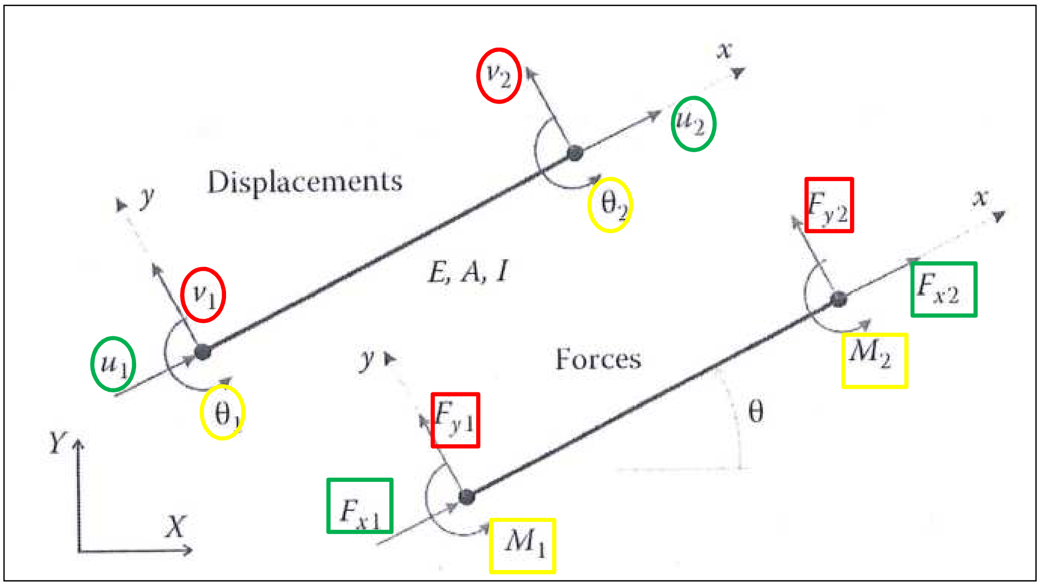
Cenni di meccanica computazionale ed applicazione per strutture con elementi *beam*

Linda Giresini

Tecnica delle Costruzioni II - 5 Marzo 2014

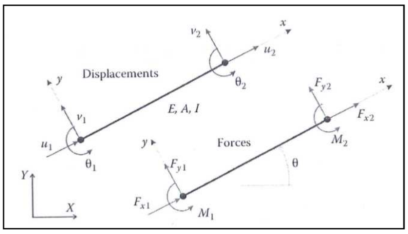
Rigid jointed frames – beam elements

- Resistono ad effetti combinati di azioni orizzontali e verticali
- Nodi incastro tra travi e colonne
- Gli elementi sono soggetti non solo a flessione ma anche a sforzo normale (beam-columns elements)
- 6 DOF per nodo



Rigid jointed frames – stiffness matrix

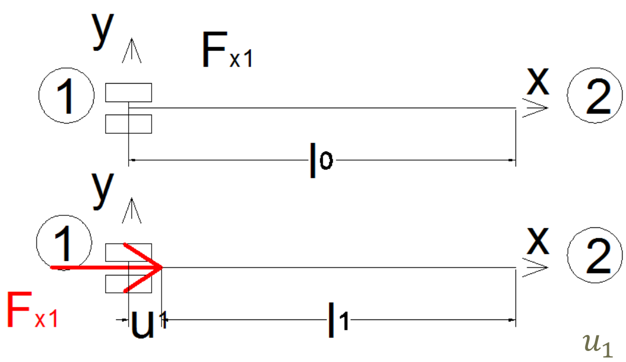
$\{d_e\} = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2,\}$ vettore degli spostamenti nodali
$\{F_e\} = \{F_{x1}, F_{y1}, M_1, F_{x2}, F_{y2}, M_2\}$ vettore delle forze nodali



$$\boxed{\{F_e\} = [K_e]\{d_e\}}$$

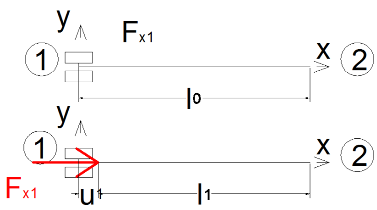
$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{bmatrix}$$

Rigid jointed frames – stiffness matrix



$$[K_e] = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

Rigid jointed frames – stiffness matrix



$$F_{x1} = \frac{EA}{L} u_1$$

$$F_{x2} = -\frac{EA}{L} u_1$$

$$[K_e] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

Forza che occorre applicare nel nodo 1 per avere in 1 uno spostamento u1 unitario.

Forza che occorre applicare nel nodo 2 per avere in 1 uno spostamento u1 unitario.

Rigid jointed frames – stiffness matrix

$$[K_e] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & \boxed{v_2} & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & F_{y1} & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & M_2 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

Forza in y che occorre applicare nel nodo 1 per avere in 2 uno spostamento **v2 unitario.**

Forza (in senso generalizzato, **coppia**) che occorre applicare nel nodo 2 per avere in 2 uno spostamento **v2 unitario.**

Rigid jointed frames – stiffness matrix

$$
[K_e] = \begin{array}{cccccc}
u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\
\hline
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & F_{y1} & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\
0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\
0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & M_2 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L}
\end{array}
$$

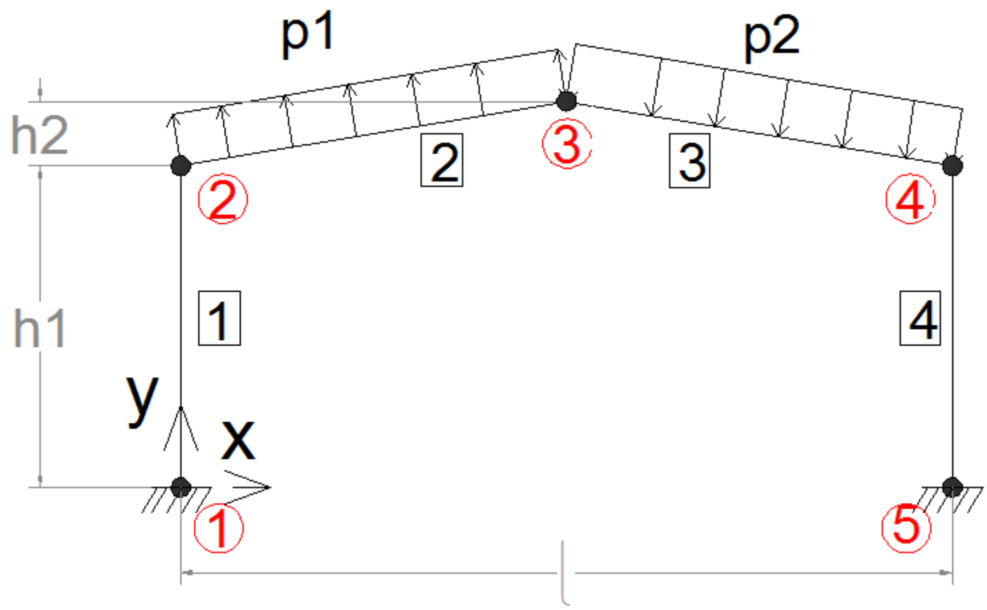
Forza in y che occorre applicare nel nodo 1 per avere in 2 uno spostamento **v2 unitario.**

Forza (in senso generalizzato, **coppia**) che occorre applicare nel nodo 2 per avere in 2 uno spostamento **v2 unitario.**

Passaggi FEM – metodo degli spostamenti

- Scrittura delle $\{F_e\} = [K_e]\{d_e\}$ ovvero delle matrici di rigidezza $[K_e]$ per ogni elemento;
- Trasformazione delle matrici di rigidezza $[K_e]$ in coordinate globali;
- Assemblaggio della matrice globale;
- Scrittura del vettore di forze globale;
- Specificazione delle condizioni al contorno (boundary conditions)
- Soluzione del sistema di equazioni $\{F_{glob}\} = [K_{glob}]\{d_{glob}\}$ ovvero determinazione del vettore degli spostamenti $\{d_{glob}\}$
- Calcolo del vettore delle reazioni incognite (relativo ai gradi di libertà dove sono state imposte le condizioni al contorno)
- Trasformazione del vettore degli spostamenti in coordinate locali;
- $\{F_e\} = [K_e]\{d_e\}$ da cui si ottiene il vettore delle forze interne.

Esempio applicativo



Dati

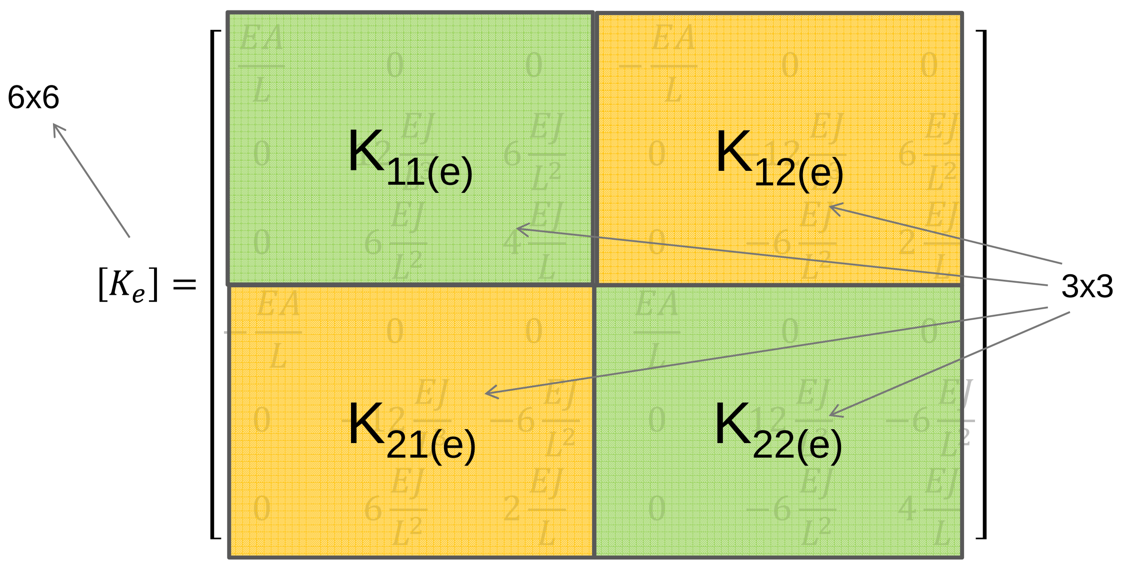
p1=p2=12 kN/m

h1=5000 mm

h2=1000 mm

l=12000 mm

$\{F_e\} = [K_e]\{d_e\}$ - matrici di rigidezza $[K_e]$ per ogni elemento



$$[K_{12(e)}] = [K_{12(e)}]^T \rightarrow [K_e]\ sym$$

$$\{F_e\} = [K_e]\{d_e\} \rightarrow \{\overline{F_e}\} = [\overline{K_e}]\{\overline{d_e}\}$$

Trasformazione delle matrici di rigidezza $[K_e]$ in coordinate globali $[\overline{K_e}]$

Per farlo occorre definire una matrice di trasformazione:

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E' una matrice ortonormale (trasposta coincide con inversa con det=1)

$$[C]^{-1} = [C]^T$$

$$\{F_e\} = [K_e]\{d_e\} \rightarrow \{\overline{F_e}\} = [\overline{K_e}]\{\overline{d_e}\}$$

$\{\overline{d_e}\} = [C]\{d_e\}$ Vettore spostamenti in globale

$\{\overline{F_e}\} = [C]\{F_e\}$ Vettore forze in globale

$$\{F_e\} = [C]^T\{\overline{F_e}\}$$

$$\{d_e\} = [C]^T\{\overline{d_e}\}$$

$$\{\overline{F_e}\} = [\overline{K_e}]\{\overline{d_e}\}$$

$$\{F_e\} = [C]^T\{\overline{F_e}\} = [K_e]\{d_e\} = [K_e][C]^T\{\overline{d_e}\}$$

Premoltiplicando per $[C]$

$$\{\overline{F_e}\} = \boxed{[C][K_e][C]^T}\{\overline{d_e}\}$$

$$[\overline{K_e}] = \boxed{[C][K_e][C]^T}$$

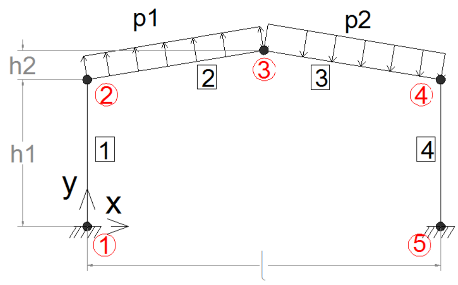
Assemblaggio della matrice globale

Ogni «0» è una matrice 3x3

$$
[\overline{K_G}] = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\delta_i = \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{matrix}
$$

Vettore spostamento nodo i

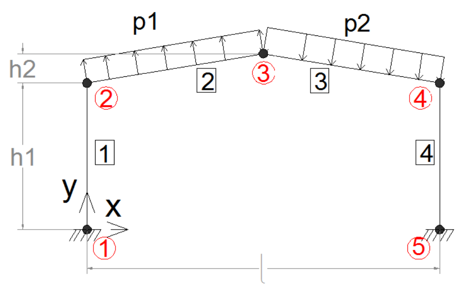


Assemblaggio della matrice globale
Step 1: presenza del solo elemento 1

Elemento 1

$$
[\overline{K_G}] = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} \overline{K}_{11(1)} & \overline{K}_{12(1)} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{K}_{21(1)} & \overline{K}_{22(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

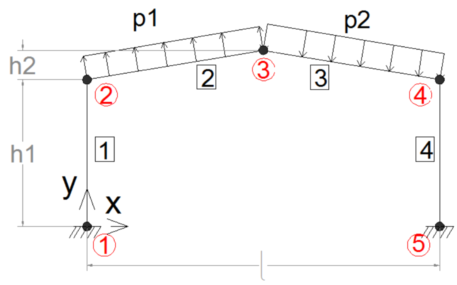
L'elemento 1 è collegato ai nodi 1 e 2, quindi si posizionano le K nelle colonne e righe corrispondenti



Assemblaggio della matrice globale
Step 2: presenza del solo elemento 2

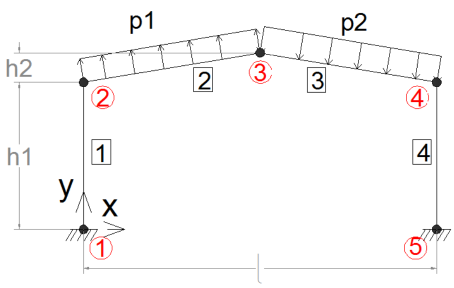
$$
[\overline{K_G}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{K}_{11(2)} & \overline{K}_{12(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{K}_{12(2)} & \overline{K}_{22(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

L'elemento 2 è collegato ai nodi 2 e 3, quindi si posizionano le K nelle colonne e righe corrispondenti



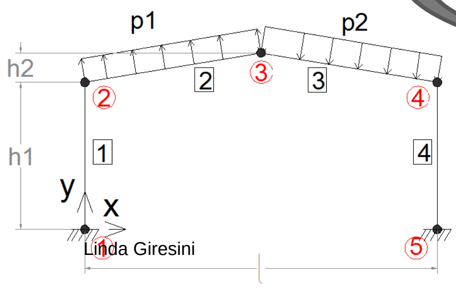
Assemblaggio della matrice globale

$$
[\overline{K_G}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \overline{K}_{11(1)} & \overline{K}_{12(1)} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{K}_{21(1)} & \overline{K}_{22(1)} + \overline{K}_{11(2)} & \overline{K}_{12(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{K}_{21(2)} & \overline{K}_{22(2)} + \overline{K}_{11(3)} & \overline{K}_{12(3)} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{K}_{21(3)} & \overline{K}_{22(3)} + \overline{K}_{11(4)} & \overline{K}_{12(4)} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{K}_{21(4)} & \overline{K}_{22(4)} \end{bmatrix} \end{array}
$$



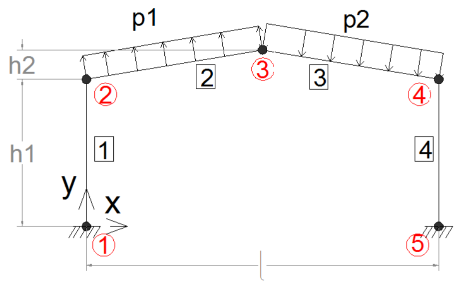
Assemblaggio della matrice globale

$$
[\overline{K_G}] = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \quad\delta_1 & \qquad\qquad\delta_2 & \qquad\qquad\delta_3 & \qquad\qquad\delta_4 & \qquad\qquad\delta_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\overline{K}_{11(1)} & \overline{K}_{12(1)} & 0 & 0 & 0 \\
\overline{K}_{21(1)} & \overline{K}_{22(1)} + \overline{K}_{11(2)} & \overline{K}_{12(2)} & 0 & 0 \\
0 & \overline{K}_{21(2)} & \overline{K}_{22(2)} + \overline{K}_{11(3)} & \overline{K}_{12(3)} & 0 \\
0 & 0 & \overline{K}_{21(3)} & \overline{K}_{22(3)} + \overline{K}_{11(4)} & \overline{K}_{12(4)} \\
0 & 0 & 0 & \overline{K}_{21(4)} & \overline{K}_{22(4)}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



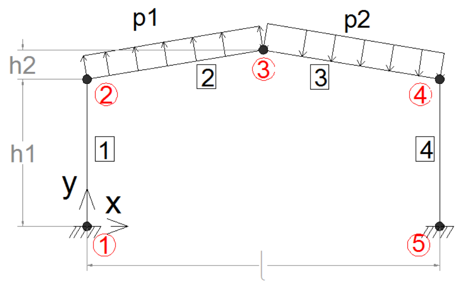
Assemblaggio della matrice globale (1° sostituzione)

$$
[\overline{K_G}] = \begin{bmatrix}
\overline{K}_{11(1)} & 0 & \overline{K}_{12(1)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \overline{K}_{22(1)} + \overline{K}_{11(2)} & \overline{K}_{12(2)} & 0 \\
0 & 0 & \overline{K}_{21(2)} & \overline{K}_{22(2)} + \overline{K}_{11(3)} & \overline{K}_{12(3)} \\
0 & \overline{K}_{12(4)} & 0 & \overline{K}_{21(3)} & \overline{K}_{22(3)} + \overline{K}_{11(4)} \\
0 & \overline{K}_{22(4)} & 0 & 0 & \overline{K}_{21(4)}
\end{bmatrix}
$$



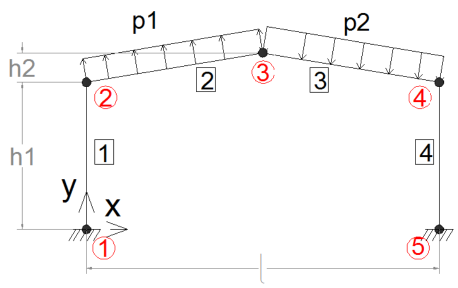
Assemblaggio della matrice globale

$$
[\overline{K_G}] = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\overline{K}_{11(1)} & \overline{K}_{12(1)} & 0 & 0 & 0 \\
\overline{K}_{21(1)} & \overline{K}_{22(1)} + \overline{K}_{11(2)} & \overline{K}_{12(2)} & 0 & 0 \\
0 & \overline{K}_{21(2)} & \overline{K}_{22(2)} + \overline{K}_{11(3)} & \overline{K}_{12(3)} & 0 \\
0 & 0 & \overline{K}_{21(3)} & \overline{K}_{22(3)} + \overline{K}_{11(4)} & \overline{K}_{12(4)} \\
0 & 0 & 0 & \overline{K}_{21(4)} & \overline{K}_{22(4)}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



Assemblaggio della matrice globale (2° sostituzione)

$$
[\overline{K_G}] = \begin{bmatrix}
\overline{K}_{11(1)} & 0 & \overline{K}_{12(1)} & 0 & 0 \\
0 & \overline{K}_{22(4)} & 0 & 0 & \overline{K}_{21(4)} \\
0 & 0 & \overline{K}_{22(1)} + \overline{K}_{11(2)} & \overline{K}_{12(2)} & 0 \\
0 & 0 & \overline{K}_{21(2)} & \overline{K}_{22(2)} + \overline{K}_{11(3)} & \overline{K}_{12(3)} \\
0 & \overline{K}_{12(4)} & 0 & \overline{K}_{21(3)} & \overline{K}_{22(3)} + \overline{K}_{11(4)}
\end{bmatrix}
$$



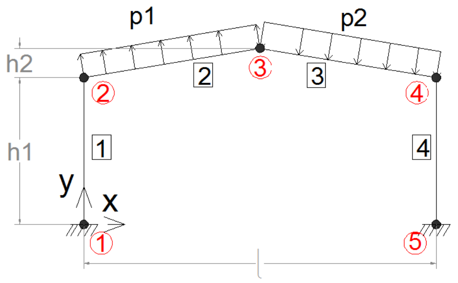
Assemblaggio della matrice globale

$$[\overline{K_G}] = \begin{bmatrix} \overline{K}_{11(1)} & 0 & \overline{K}_{12(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{K}_{22(4)} & 0 & 0 & \overline{K}_{21(4)} \\ 0 & 0 & \overline{K}_{22(1)} + \overline{K}_{11(2)} & \overline{K}_{12(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{K}_{21(2)} & \overline{K}_{22(2)} + \overline{K}_{11(3)} & \overline{K}_{12(3)} \\ 0 & \overline{K}_{12(4)} & 0 & \overline{K}_{21(3)} & \overline{K}_{22(3)} + \overline{K}_{11(4)} \end{bmatrix}$$

K_{PP} K_{FP}

K_{PF} K_{FF}

$P = prescribed$
F= free



$$\begin{bmatrix} F_{PP} \\ F_{PF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{PP} & K_{PF} \\ K_{FP} & F_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_P \\ \delta_F \end{bmatrix}$$

Soluzione del sistema di equazioni

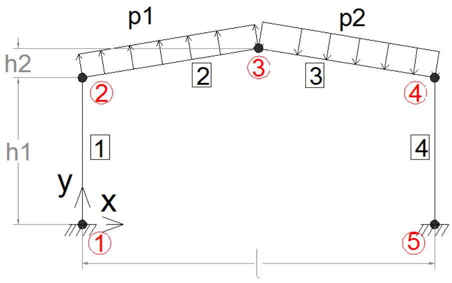
$$\begin{bmatrix} F_{PP} \\ F_{PF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{PP} & K_{PF} \\ K_{FP} & F_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_P \\ \delta_F \end{bmatrix}$$

- Specificazione delle condizioni al contorno (boundary conditions)
- Soluzione del sistema di equazioni $\{F_{glob}\} = [K_{glob}]\{d_{glob}\}$ ovvero determinazione del vettore degli spostamenti $\{d_{glob}\}$
- Calcolo del vettore delle reazioni incognite (relativo ai gradi di libertà dove sono state imposte le condizioni al contorno)
- Trasformazione del vettore degli spostamenti in coordinate locali;
- $\{F_e\} = [K_e]\{d_e\}$ da cui si ottiene il vettore delle forze interne.

Problem data

```
nnd=5;     %number of nodes
nel=4;      %number of elements;
nne=2;     %number of nodes per element;
nodof=3;  %number of dof per node;
eldof=nne*nodof;   %number of dof per element;
```

```
geom=zeros(nnd,2);
geom(1,1)=0.        ;          geom(1,2)=0.;        %x and y coordinates of node 1
geom(2,1)=0.        ;          geom(2,2)=5000.;     %x and y coordinates of node 2
geom(3,1)=6000.        ;      geom(3,2)=6000. ;    %x and y coordinates of node 3
geom(4,1)=12000.       ;      geom(4,2)=5000.;     %x and y coordinates of node 4
geom(5,1)=12000.       ;      geom(5,2)=0.;        %x and y coordinates of node 5
```

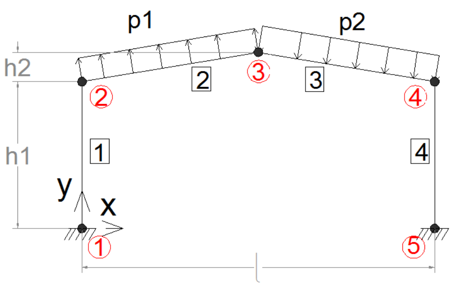


Linda Giresini

Problem data

```
connec=zeros(nel,2);
connec(1,1)=1;            connec(1,2)=2;        %first and second node of element 1
connec(2,1)=2;            connec(2,2)=3;        %first and second node of element 2
connec(3,1)=3;            connec(3,2)=4;        %first and second node of element 3
connec(4,1)=4;            connec(4,2)=5;        %first and second node of element 4
```

```
prop=zeros(nel,3);
prop(1,1)=2.0E+5; prop(1,2)=5210; prop(1,3)=86.4E+6; %E,I,A element 1
prop(2,1)=2.0E+5; prop(2,2)=5210; prop(2,3)=86.4E+6; %E,I,A element 2
prop(3,1)=2.0E+5; prop(3,2)=5210; prop(3,3)=86.4E+6; %E,I,A element 3
prop(4,1)=2.0E+5; prop(4,2)=5210; prop(4,3)=86.4E+6; %E,I,A element 4
```

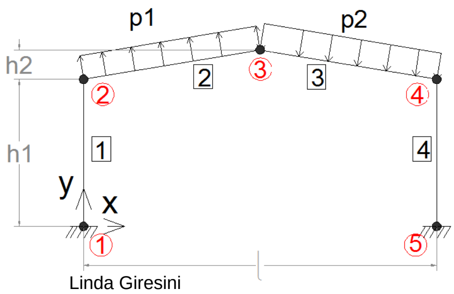


Linda Giresini

Problem data
Boundary conditions

```
nf=ones(nnd,nodof);                    %initialise the matrix nf to 1
nf(1,1)=0; nf(1,2)=0; nf(1,3)=0;       %prescribed nodal freedom of node 1
nf(5,1)=0; nf(5,2)=0; nf(5,3)=0;       %prescribed nodal freedom of node 5
```

$$[nf] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [nf] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

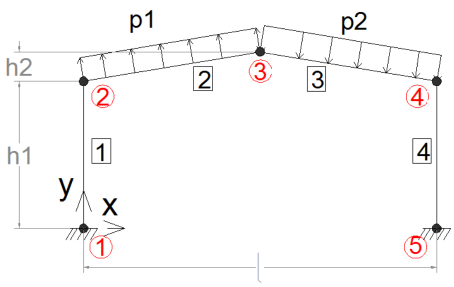


Vengono contati i dof diversi da 0 (ovvero quelli liberi, non vincolati) e il loro rank assegnato alla matrice nf (in questo caso il massimo grado è pari a 9)

Problem data - loading

I carichi sono uniformemente distribuiti (p1 e p2) e computati nel sdr globale.

```
Element_loads=zeros(nel,6);
Element_loads(2,:)=[0    36.4965e3     37e6   0   36.4965e3       -37e6];
Element_loads(3,:)=[0    -36.4965e3     -37e6   0  - 36.4965e3      37e6];
```

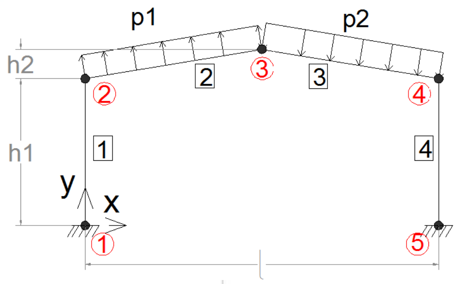


Editor - C:\Users\Linda\Documents\MATLAB\framedata.m

framedata.m

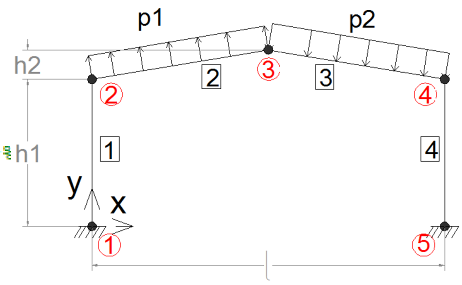
```
%framedata
global nnd nel nne nodof eldof n geom connec F prop nf Element_loads Joint_loads force Hinge
%
format short e
%
nnd=5;     %number of nodes
nel=4;      %number of elements;
nne=2;     %number of nodes per element;
nodof=3;   %number of dof per node;
eldof=nne*nodof;   %number of dof per element;

% nodes coordinates x and y
%
geom=zeros(nnd,2);
geom(1,1)=0.        ;          geom(1,2)=0.;        %x and y coordinates of node 1
geom(2,1)=0.        ;          geom(2,2)=5000.;     %x and y coordinates of node 2
geom(3,1)=6000.         ;      geom(3,2)=6000. ;    %x and y coordinates of node 3
geom(4,1)=12000.         ;     geom(4,2)=5000.;     %x and y coordinates of node 4
geom(5,1)=12000.         ;     geom(5,2)=0.;        %x and y coordinates of node 5
%
%Element connectivity
%
connec=zeros(nel,2);
connec(1,1)=1;               connec(1,2)=2;          %first and second node of element 1
connec(2,1)=2;               connec(2,2)=3;          %first and second node of element 2
connec(3,1)=3;               connec(3,2)=4;          %first and second node of element 3
connec(4,1)=4;               connec(4,2)=5;          %first and second node of element 4
%
%Geometrical properties
%
```



Command Window

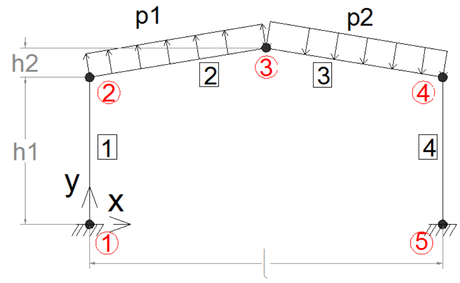
```
>> %frame.m
global nnd nel nne nodof eldof n geom connec F prop nf Element_loads Joint_loads force Hing
%
format short e
%
disp('Executing frame.m'); %open file output for results
%
%ALTER NEXT LINES TO CHOOSE OUTPUT FILES
%
fid=fopen('frame_results.txt','w');
%
%%%%%%%%%%%%%%%beginning of data input%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
framedata   %load the input file
F=zeros(n,1);  %initialize global force to zero
F=Assem_Joint_loads(F);    %Assemble joints loads to F
%print_model_data          %print model data
KK=zeros(n,n);              %initialize the global stiffness matrix to zero
%
for i=1:nel
kl=beam_column_k(i);        %form element matrix in local x,y
C=beam_column_C(i);        %form transformation matrix
kg=C*kl*C';                 %form the global matrix
fl=Element_loads(i,:);      %retrieve element nodal forces in local coordinates
fg=C*fl';                   %transform element nodal forces from local to global coordinates
g=beam_column_g(i);         %retrieve the elements dof
KK=form_KK(KK, kg, g);    %assemble global stiffness matrix
```



Command Window

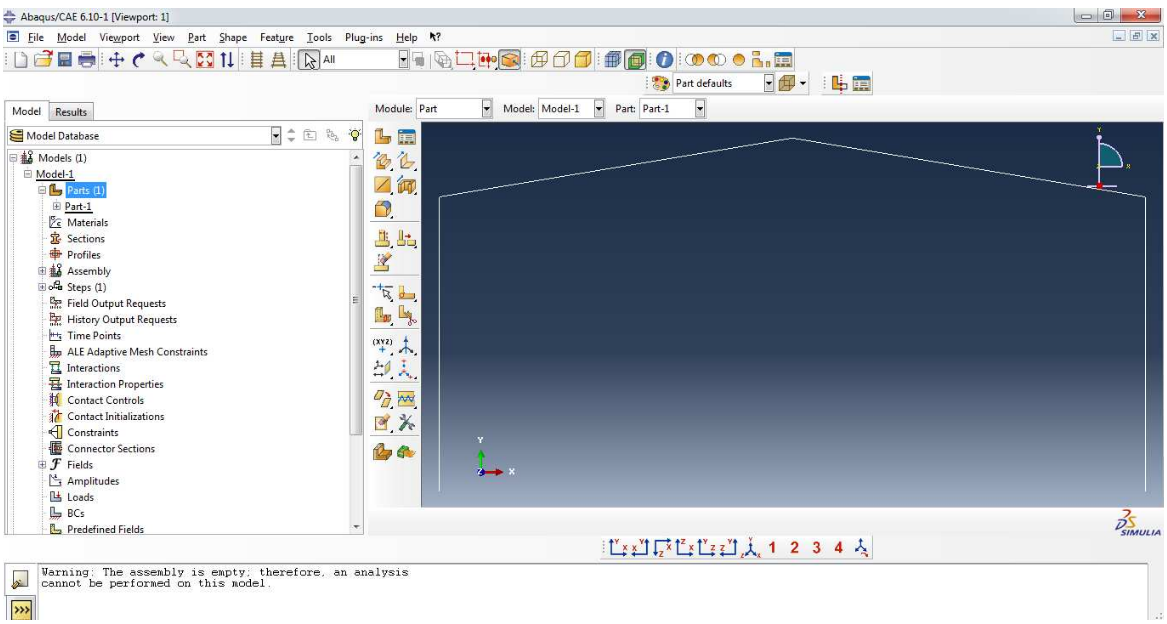
```
delta=KK\F';
%
%Extract nodal displacements
%
for i=1:nnd
for j=1:nodof
node_disp(i,j) = 0;
if nf(i,j)~=0;
node_disp(i,j)=delta(nf(i,j));
end
end
end

for i=1:nel
kl=beam_column_k(i);
C=beam_column_C(i);
kg=C*kl*C';
g=beam_column_g(i);        %retrieve the elements dof
for j=1:eldof
if g(j)==0
edg(j)=0.;     %displacement 0 for restrained dof
edg(j)=delta(g(j));
end
end
fg=kg*edg';
fl=C'*fg;
f0=Element_loads(i,:)    % equivalent nodal loads
force_l(i,:)=fl-f0';
force_g(i,:)=C*(fl-f0');
```



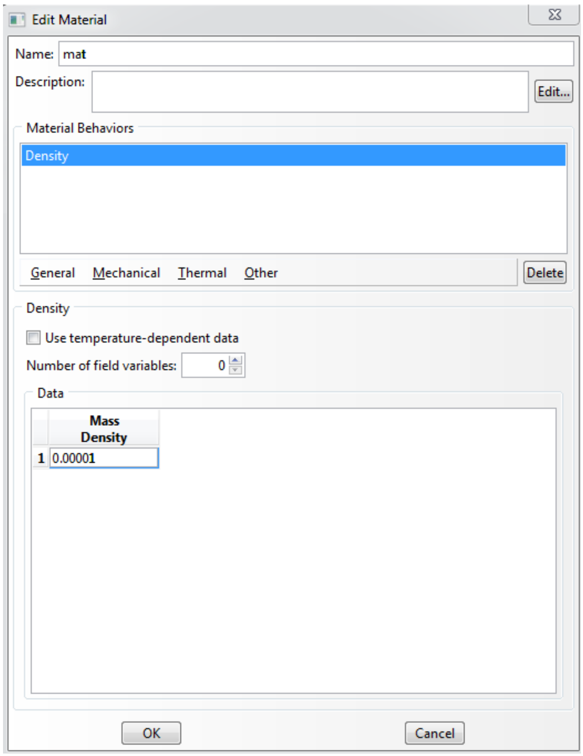
Calcolo su Abaqus CAE 6.10

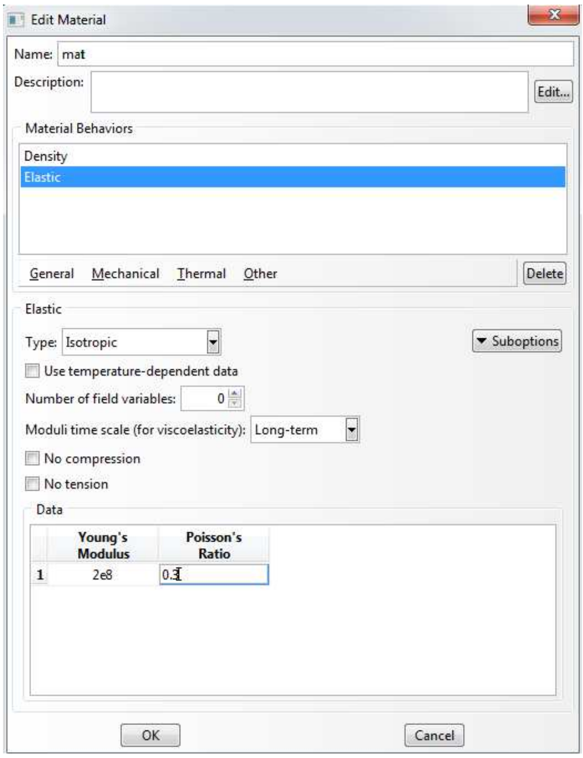
La geometria del modello viene costruita per punti (elementi wires)



Calcolo su Abaqus CAE 6.10

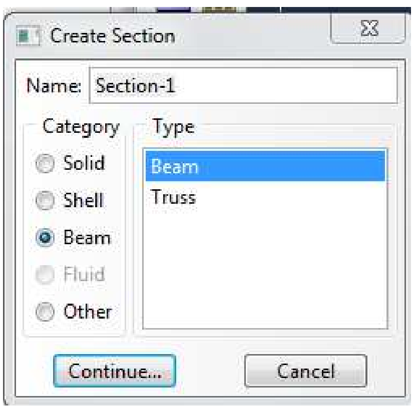
Proprietà dei materiali (peso proprio trascurabile)

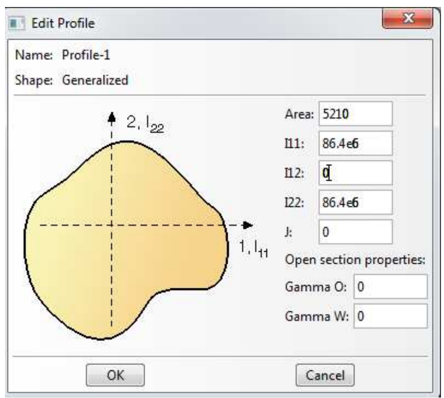




Calcolo su Abaqus CAE 6.10

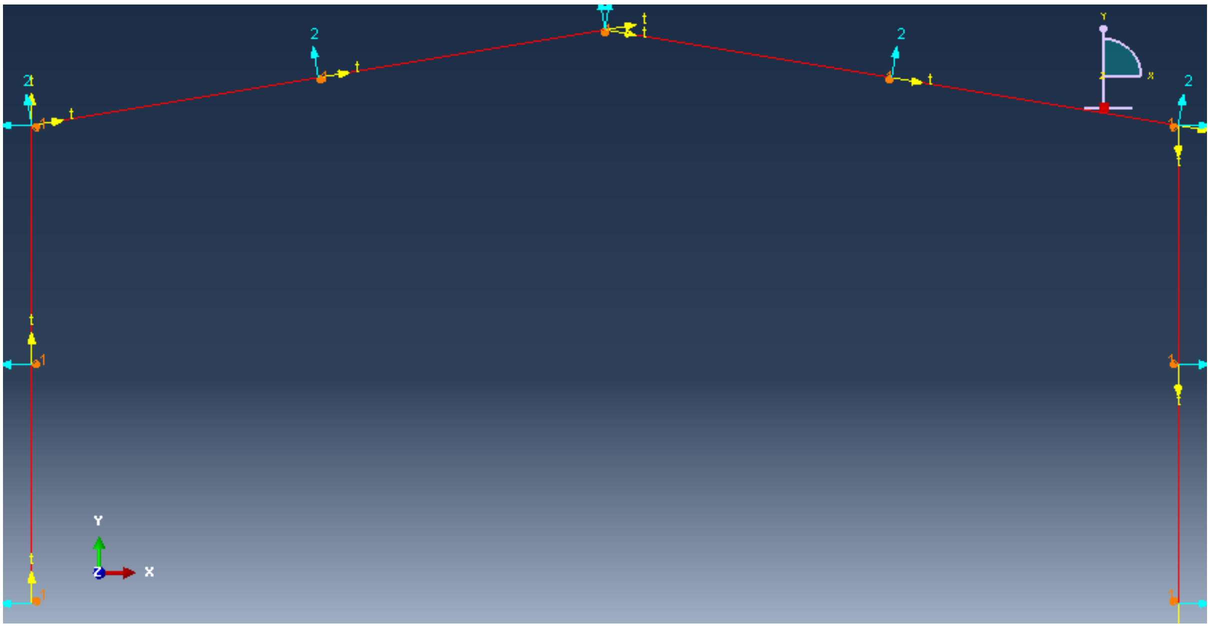
Creazione della sezione.





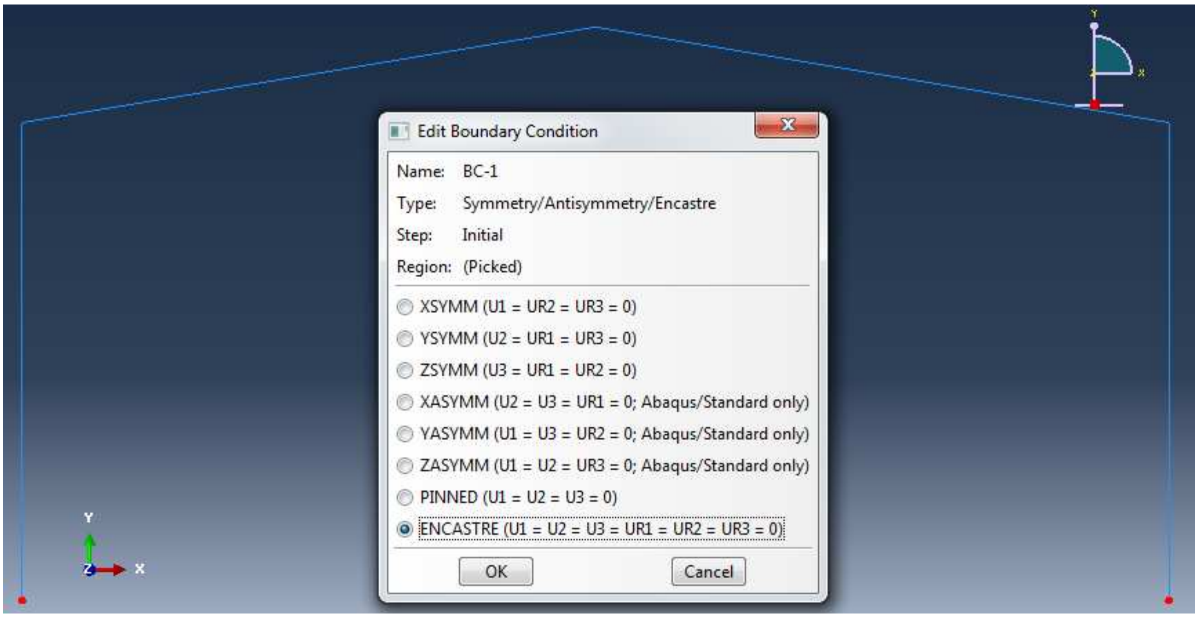
Calcolo su Abaqus CAE 6.10

Orientazione della sezione.



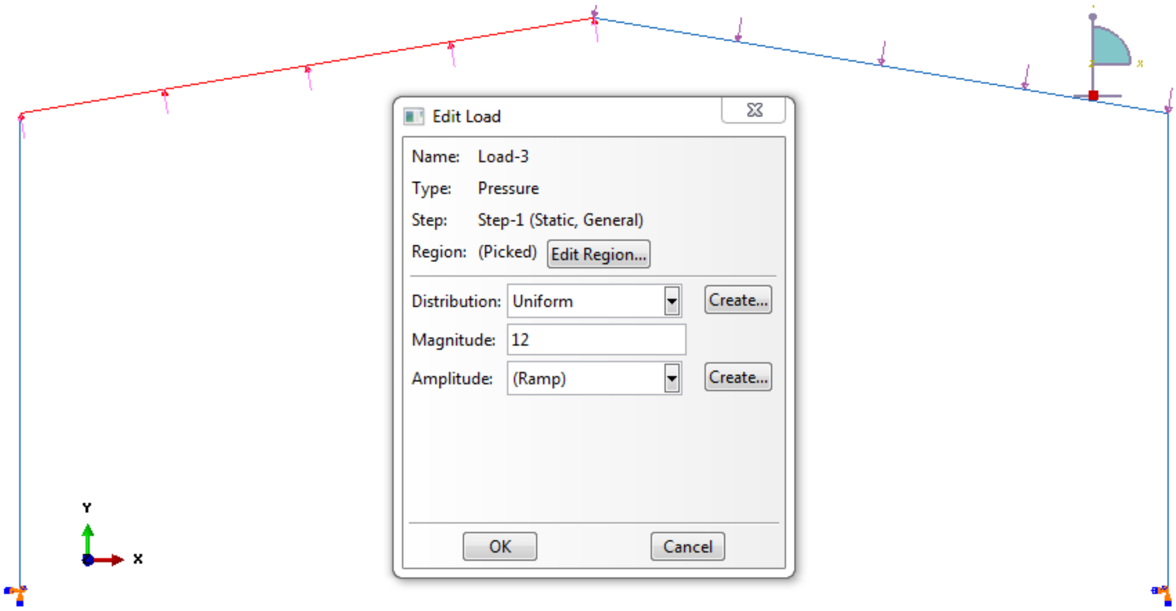
Calcolo su Abaqus CAE 6.10

Boundary conditions (nodi incastrati in rosso).



Calcolo su Abaqus CAE 6.10

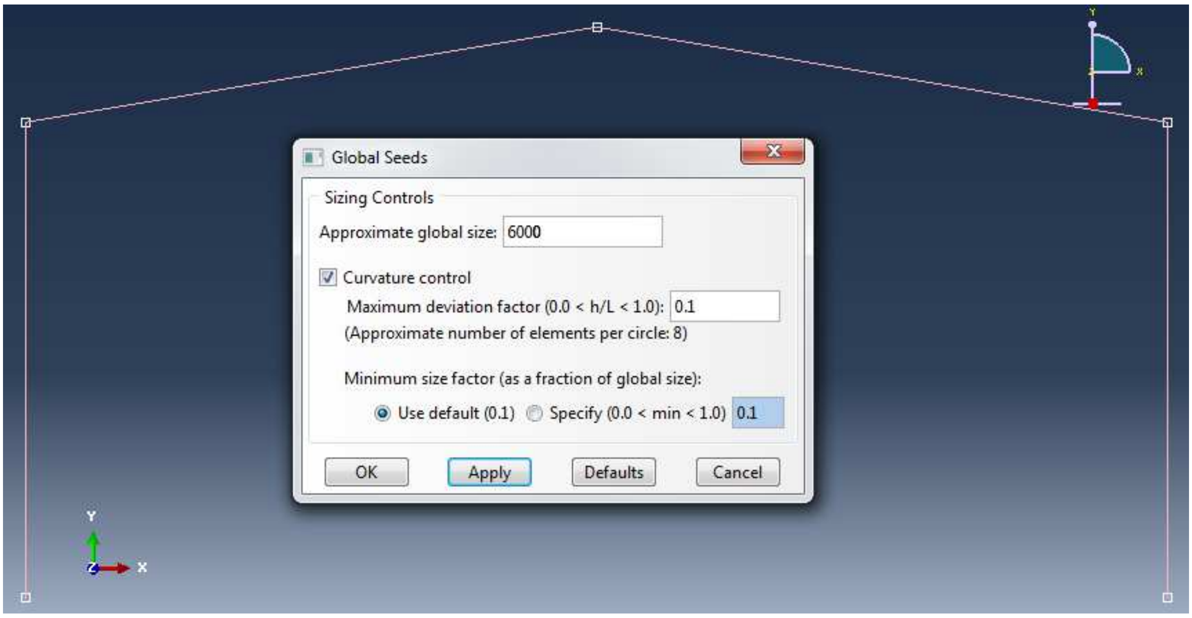
Carico sulla 1* trave.



Linda Giresini

Calcolo su Abaqus CAE 6.10

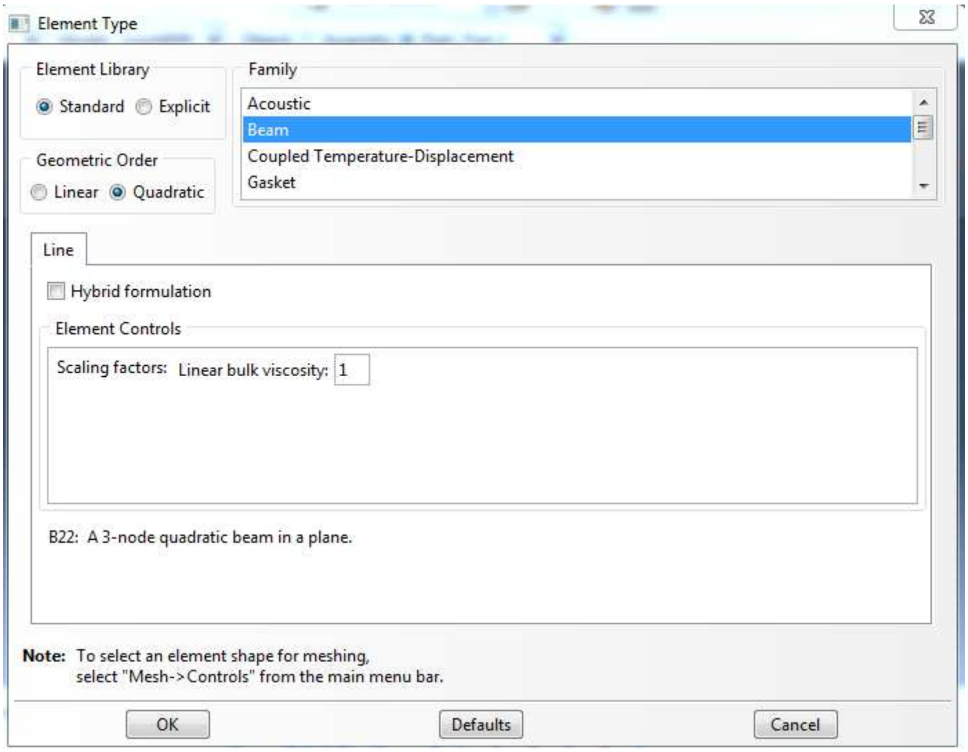
Mesh seeds (in modo da avere solo 4 elementi trave).



Linda Giresini

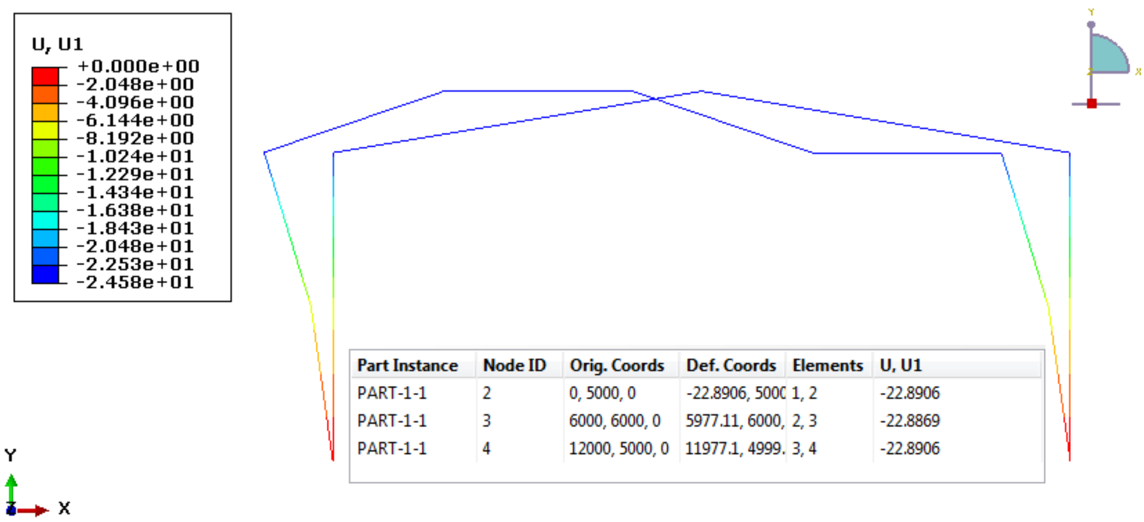
Calcolo su Abaqus CAE 6.10

Scelta del tipo di elemento per la mesh (beam quadratico)



Calcolo su Abaqus CAE 6.10

Output: deformata (mesh6000)



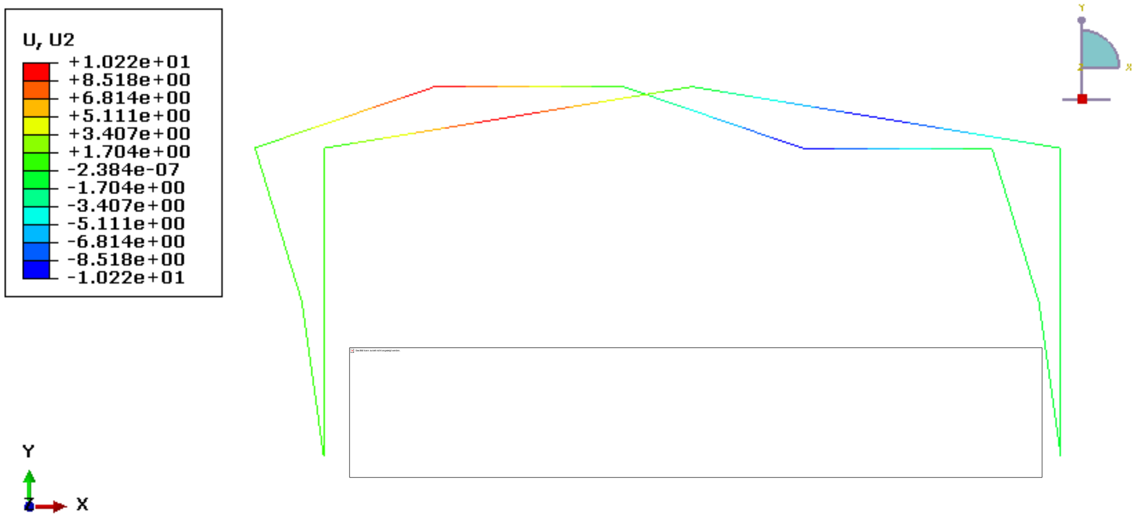
Part Instance	Node ID	Orig. Coords	Def. Coords	Elements	U, U1
PART-1-1	2	0, 5000, 0	-22.8906, 500(	1, 2	-22.8906
PART-1-1	3	6000, 6000, 0	5977.11, 6000,	2, 3	-22.8869
PART-1-1	4	12000, 5000, 0	11977.1, 4999.	3, 4	-22.8906

$$
\begin{array}{cccc}
\text{dispX (u1)} & \text{disp\_Y (u2)} & \text{rot(u\_rot3)} & \textit{node}
\end{array}
$$

$$
[\delta] = \begin{bmatrix} 0.0e0 & 0.0e0 & 0.0e0 \\ -2.50314e1 & 1.63630e-1 & 7.11912e-3 \\ -2.50412e1 & -7.98515e-15 & -6.85508e-3 \\ -2.50314e1 & 1.63630e-1 & 7.11912e-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
$$

Calcolo su Abaqus CAE 6.10

Output: deformata (mesh6000)

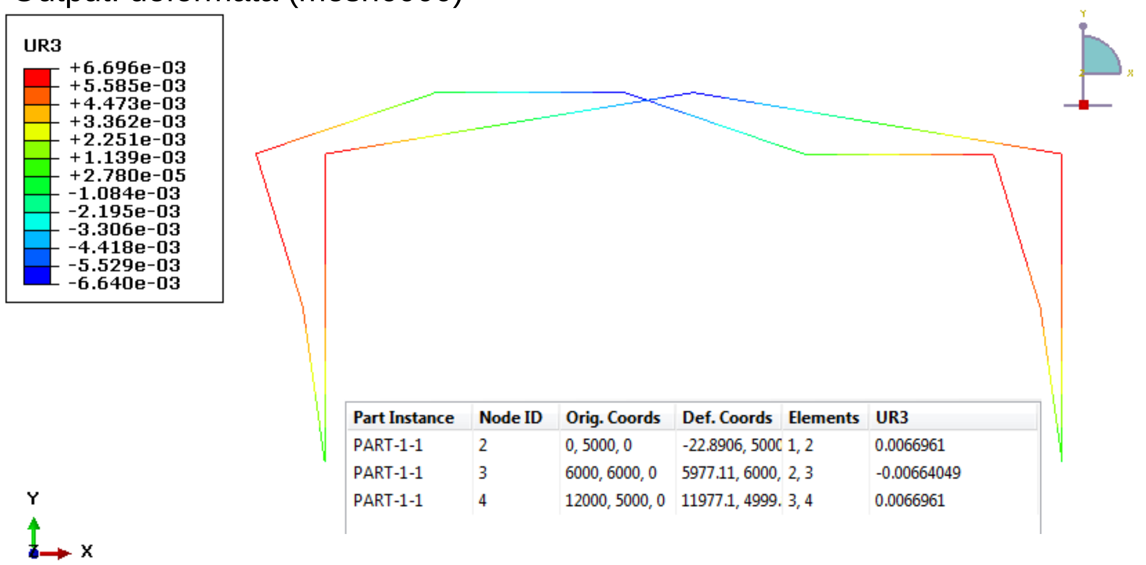


$$
\begin{array}{c} \\ [\delta] = \end{array}
\begin{array}{ccc} \text{dispX (u1)} & \text{disp\_Y (u2)} & \text{rot(u\_rot3)} \end{array}
$$

$$
[\delta] = \begin{bmatrix} 0.0e0 & 0.0e0 & 0.0e0 \\ -2.50314e1 & 1.63630e-1 & 7.11912e-3 \\ -2.50412e1 & -7.98515e-15 & -6.85508e-3 \\ -2.50314e1 & 1.63630e-1 & 7.11912e-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \textit{node} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
$$

Calcolo su Abaqus CAE 6.10

Output: deformata (mesh6000)



Part Instance	Node ID	Orig. Coords	Def. Coords	Elements	UR3
PART-1-1	2	0, 5000, 0	-22.8906, 500(	1, 2	0.0066961
PART-1-1	3	6000, 6000, 0	5977.11, 6000,	2, 3	-0.00664049
PART-1-1	4	12000, 5000, 0	11977.1, 4999.	3, 4	0.0066961

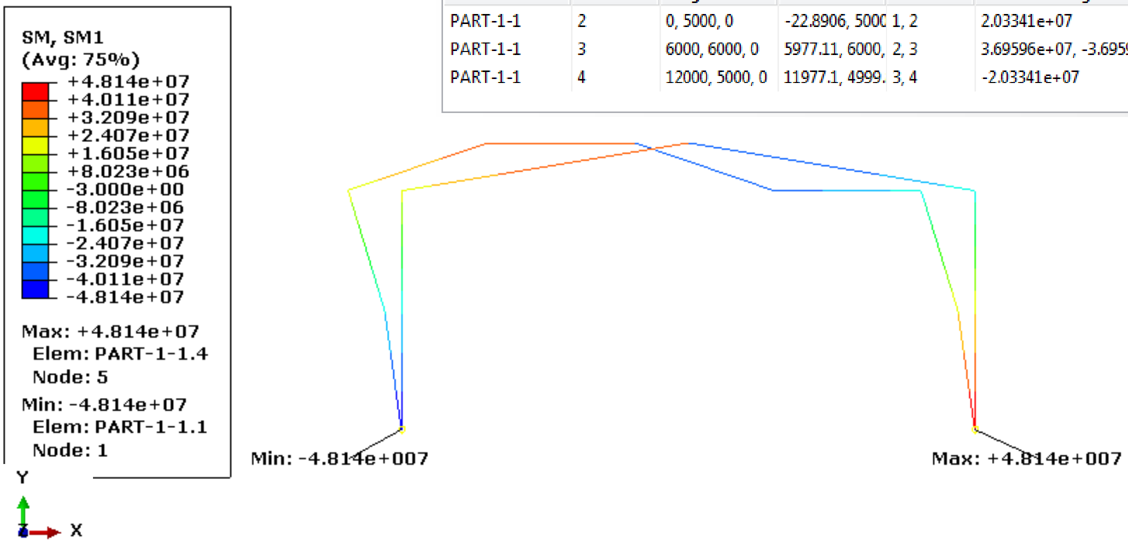
$$
\begin{array}{ccc} \text{dispX (u1)} & \text{disp\_Y (u2)} & \text{rot(u\_rot3)} \end{array}
$$

$$
[\delta] = \begin{bmatrix} 0.0e0 & 0.0e0 & 0.0e0 \\ -2.50314e1 & 1.63630e-1 & 7.11912e-3 \\ -2.50412e1 & -7.98515e-15 & -6.85508e-3 \\ -2.50314e1 & 1.63630e-1 & 7.11912e-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \textit{node} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
$$

Calcolo su Abaqus CAE 6.10

Output: momenti flettenti (mesh6000)

Part Instance	Node ID	Orig. Coords	Def. Coords	Elements	SM, SM1 (Avg: 75%)
PART-1-1	2	0, 5000, 0	-22.8906, 5000	1, 2	2.03341e+07
PART-1-1	3	6000, 6000, 0	5977.11, 6000,	2, 3	3.69596e+07, -3.69596e+07
PART-1-1	4	12000, 5000, 0	11977.1, 4999.	3, 4	-2.03341e+07



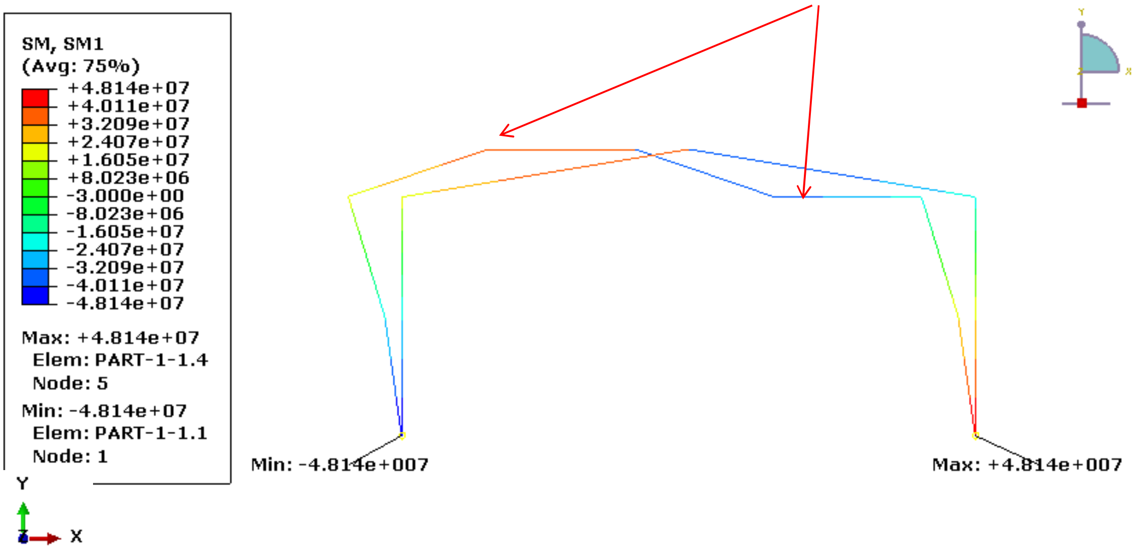
$$
[f\_loc] = \begin{array}{cccccc c}
fx1 & fy1 & M1 & fx2 & fy2 & M2 & \\
\end{array}
$$

$$
[f\_loc] = \left[\begin{array}{cccccc}
-34100.5529 & -11999.9753 & -54603626.4780 & 34100.5529 & 11999.9753 & -5396249.9239 \\
6230.6063 & -35609.3620 & 5396249.9239 & -6230.6063 & -37383.6380 & -0.0000 \\
-6230.6063 & 37383.6380 & 0.00000 & 35609.3620 & 35609.3620 & 5396249.9239 \\
34100.5529 & -11999.9753 & -5396249.9239 & 11999.9753 & 11999.9753 & -54603626.4780
\end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
$$

Linda Giresini

Calcolo su Abaqus CAE 6.10

Momento per trave di luce l/2 soggetta a p=12kN/m =6.3e7 Nmm



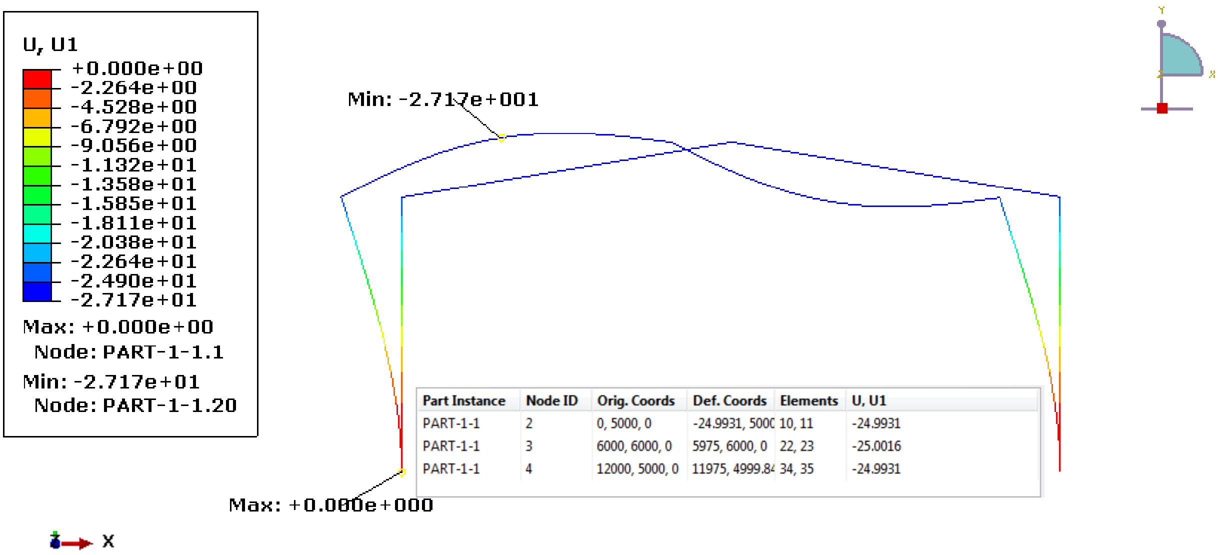
$$
[f\_loc] = \begin{array}{cccccc c}
fx1 & fy1 & M1 & fx2 & fy2 & M2 & \\
\end{array}
$$

$$
[f\_loc] = \left[\begin{array}{cccccc}
-34100.5529 & -11999.9753 & -54603626.4780 & 34100.5529 & 11999.9753 & -5396249.9239 \\
6230.6063 & -35609.3620 & 5396249.9239 & -6230.6063 & -37383.6380 & -0.0000 \\
-6230.6063 & 37383.6380 & 0.00000 & 35609.3620 & 35609.3620 & 5396249.9239 \\
34100.5529 & -11999.9753 & -5396249.9239 & 11999.9753 & 11999.9753 & -54603626.4780
\end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
$$

Linda Giresini

Calcolo su Abaqus CAE 6.10

Output: deformata (mesh500)



$$
\begin{array}{c}
 \\
[\delta] =
\end{array}
\begin{array}{cccc}
\text{dispX (u1)} & \text{disp\_Y (u2)} & \text{rot(u\_rot3)} & \textit{node} \\
\end{array}
$$

$$
[\delta] = \begin{bmatrix} 0.0e0 & 0.0e0 & 0.0e0 \\ -2.50314e1 & 1.63630e-1 & 7.11912e-3 \\ -2.50412e1 & -7.98515e-15 & -6.85508e-3 \\ -2.50314e1 & 1.63630e-1 & 7.11912e-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
$$

Calcolo su Abaqus CAE 6.10

Output: deformata (mesh100)

Part Instance	Node ID	Orig. Coords	Def. Coords	Elements	U, U1
PART-1-1	2	0, 5000, 0	-25.1458, 500(	50, 51	-25.1458
PART-1-1	3	6000, 6000, 0	5974.84, 6000,	111, 112	-25.1551
PART-1-1	4	12000, 5000, 0	11974.9, 4999.	172, 173	-25.1458

Output: deformata (mesh500)

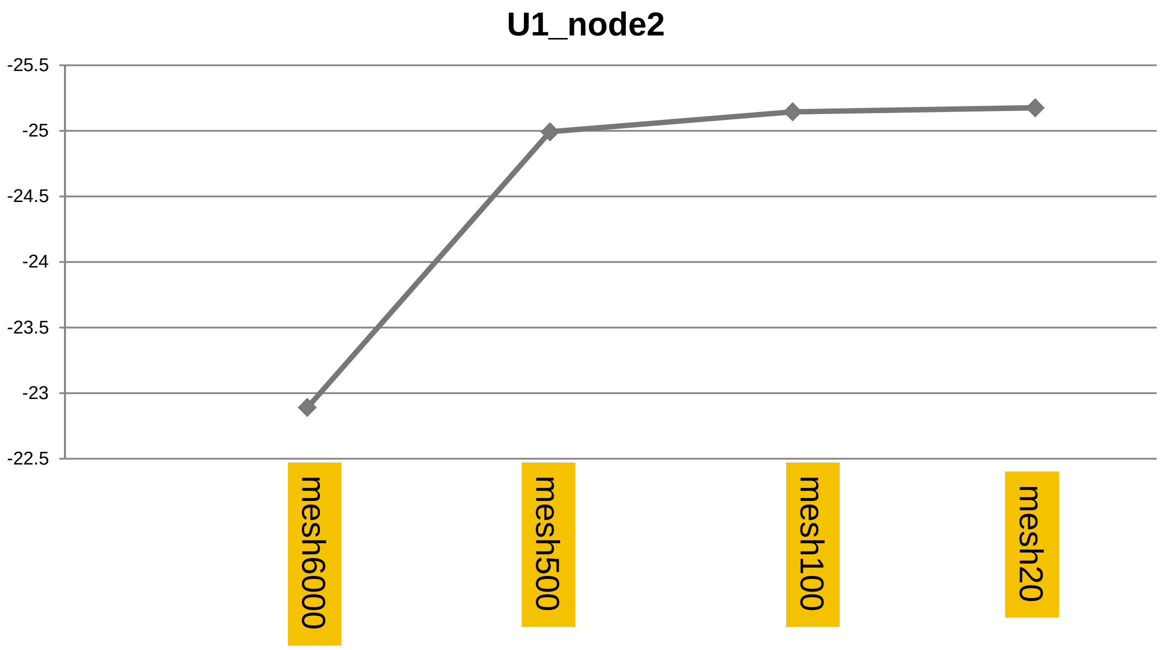
Part Instance	Node ID	Orig. Coords	Def. Coords	Elements	U, U1
PART-1-1	2	0, 5000, 0	-24.9931, 500(	10, 11	-24.9931
PART-1-1	3	6000, 6000, 0	5975, 6000, 0	22, 23	-25.0016
PART-1-1	4	12000, 5000, 0	11975, 4999.8	34, 35	-24.9931

Output: deformata (mesh6000)

Part Instance	Node ID	Orig. Coords	Def. Coords	Elements	U, U1
PART-1-1	2	0, 5000, 0	-22.8906, 500(	1, 2	-22.8906
PART-1-1	3	6000, 6000, 0	5977.11, 6000,	2, 3	-22.8869
PART-1-1	4	12000, 5000, 0	11977.1, 4999.	3, 4	-22.8906

Calcolo su Abaqus CAE 6.10

Confronto tra gli spostamenti in X del nodo 2 e convergenza al raffinamento della mesh.



Cenni di modellazione strutturale

Linda Giresini

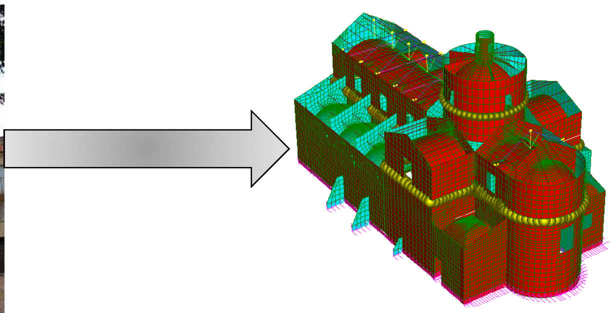
CONCETTI DI BASE DEL FEM

DISCRETIZZAZIONE: dal problema continuo al discreto

Nel FEM una struttura è divisa in sottostrutture (*elementi finiti*) che possono essere descritti con un numero finito di variabili indipendenti (spostamenti) associati ai nodi. Si suppone che le strutture siano connesse le une alle altre solo in corrispondenza dei nodi (attraverso i quali, quindi, gli elementi finiti interagiscono)

Struttura reale (complessa)

Modello FEM (discretizzato)



LA MODELLAZIONE FEM NON E' UNO STRUMENTO DA USARE CON LEGGEREZZA

Incertezze nell'affrontare una modellazione FEM:

1. Concezione del modello: globale? locale?
2. Tipo di analisi: lineare? non lineare?
3. Scelta delle azioni sismiche: analisi con spettri di risposta, push-over, dinamica lineare time-history, non lineare?

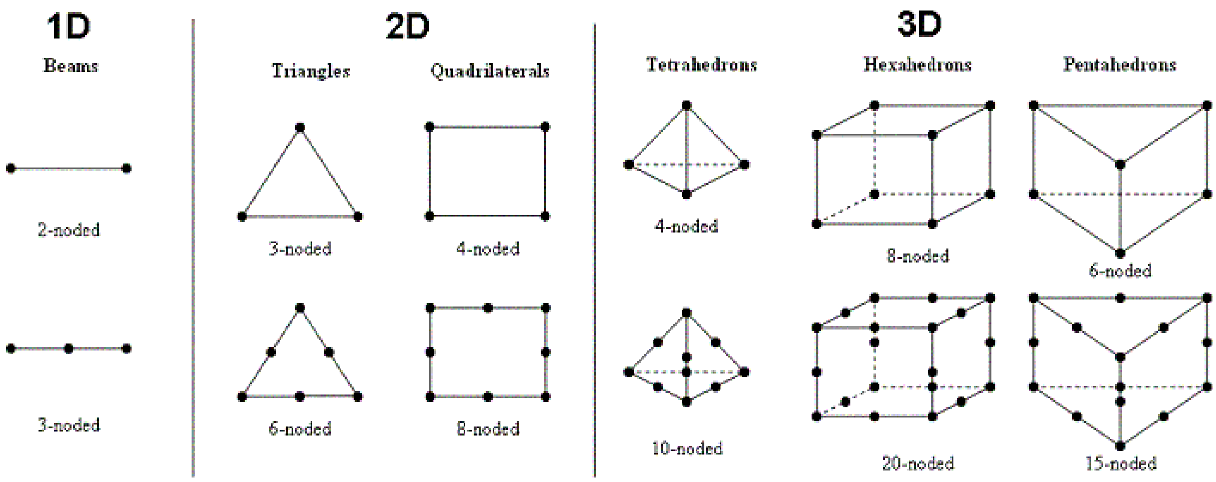
Occorre sempre chiedersi:
ha davvero senso quello che stiamo facendo con il programma?

MODELLAZIONE FEM

Concezione del modello strutturale: dove è opportuno semplificare per non avere inutili complicazioni (elementi non strutturali, copertura)

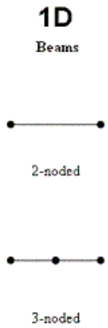
Notevole riduzione dell'onere computazionale, facilità di interpretazione dei risultati, limitazione degli errori

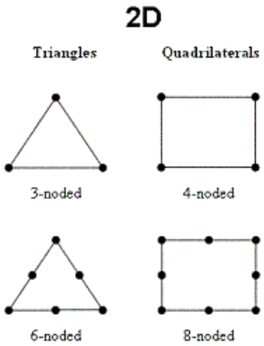
TIPI DI ELEMENTI

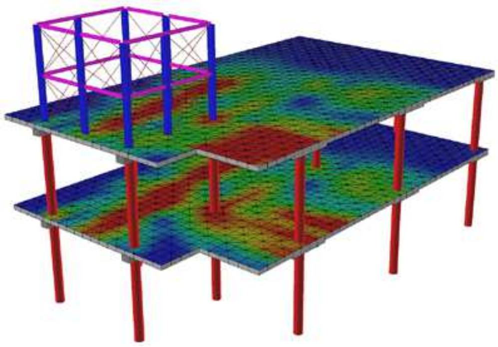


- Non è detto che elementi più complessi portino migliori soluzioni;
- Occorre trovare un compromesso tra accuratezza nel calcolo, onere computazionale ed interpretabilità dei risultati.

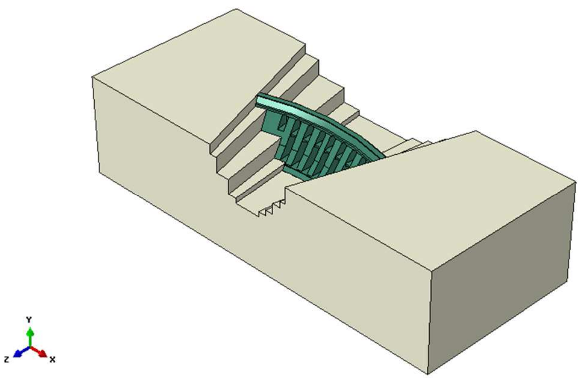
TIPI DI ELEMENTI– beam e plate/shell

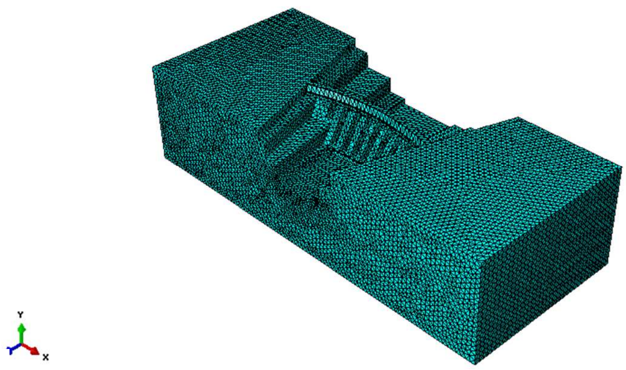


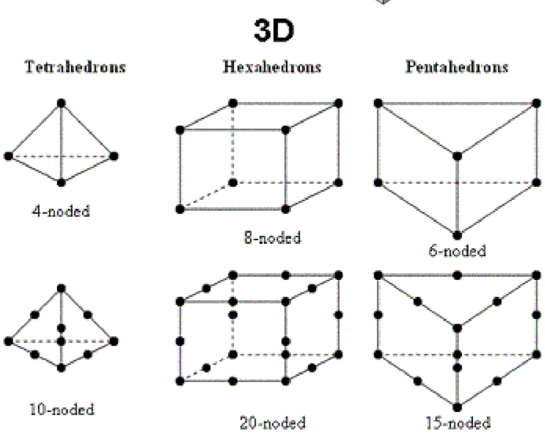




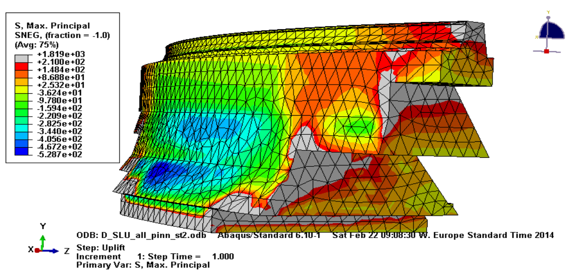
TIPI DI ELEMENTI - brick



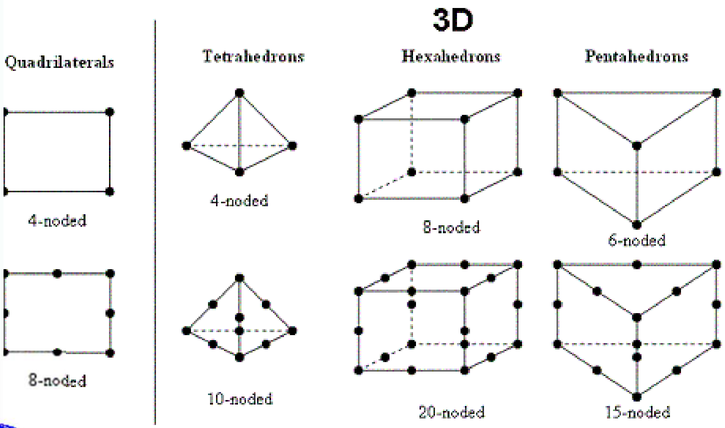


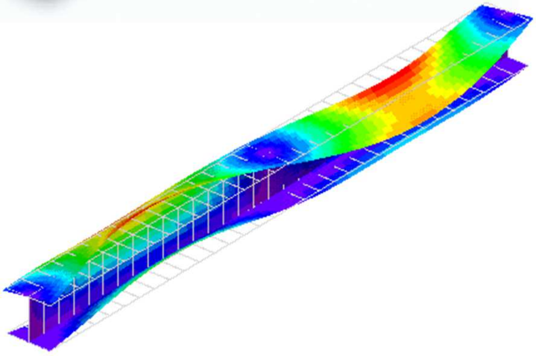


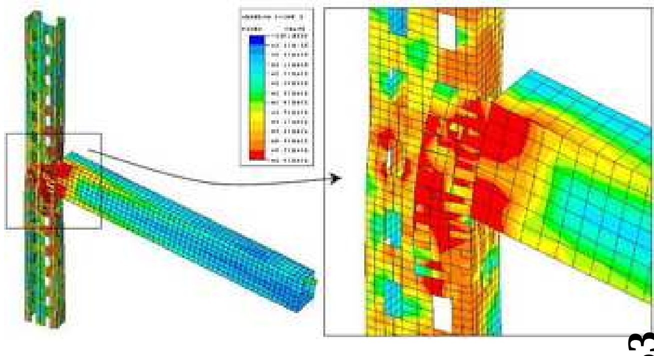
Elementi richiesti per geometrie complesse 3dim.



TIPI DI ELEMENTI







MESH DEL MODELLO FE

Dalla bontà della mesh deriva l'attendibilità della soluzione.

Possibilità standard per creare una mesh:

1. Trattare la geometria in un software CAD e importarla;
2. Sfruttare il meshatore automatico del programma di calcolo;

Nuova frontiera:

Isogeometric analysis: approccio computazionale basato sulla possibilità di integrare analisi ad elementi finiti in ambienti CAD con NURBS (Non Uniform Rational B-Splines).
Metodo più robusto, meglio condizionato e accurato di quelli attuali.