

**Prova d'esame del 22 febbraio 2011**

Dati:

$$\begin{aligned} E &:= 35 \cdot \text{GPa} & \rho &:= 2500 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ J_{30 \times 30} &:= \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot \text{cm} \cdot (30 \cdot \text{cm})^3 & J_{30 \times 40} &:= \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot \text{cm} \cdot (40 \cdot \text{cm})^3 & J_{30 \times 50} &:= \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot \text{cm} \cdot (50 \cdot \text{cm})^3 \\ H_1 &:= 4 \cdot \text{m} & H_2 &:= 2 \cdot \text{m} & H_3 &:= H_2 + \frac{2 \cdot \text{m}}{8 \cdot \text{m}} \cdot 3 \cdot \text{m} = 2.75 \text{ m} \\ m_1 &:= 48000 \cdot \text{kg} & m_2 &:= 26000 \cdot \text{kg} \\ p_{1\text{max}} &:= 150 \cdot \text{kN} & p_{2\text{max}} &:= 100 \cdot \text{kN} \end{aligned}$$

Rigidezze equivalenti dei piani:

$$\begin{aligned} k_1 &:= \frac{12 \cdot E \cdot J_{30 \times 30}}{H_1^3} + 2 \cdot \frac{12 \cdot E \cdot J_{30 \times 40}}{H_1^3} + 2 \cdot \frac{12 \cdot E \cdot J_{30 \times 50}}{H_1^3} & k_1 &= 66445.313 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \\ k_2 &:= 2 \cdot \frac{3 \cdot E \cdot J_{30 \times 30}}{H_2^3} + \frac{3 \cdot E \cdot J_{30 \times 40}}{H_3^3} + \frac{3 \cdot E \cdot J_{30 \times 50}}{H_1^3} & k_2 &= 30923.84 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Equazioni di equilibrio dinamico:

$$\begin{aligned} -m_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_1 - k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot (u_2 - u_1) + p_1(t) &= 0 \\ -m_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_2 - k_2 \cdot (u_2 - u_1) + p_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} u_1 \\ \frac{d^2}{dt^2} u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Ricerca dei modi propri di vibrare

$$\left| \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} - \omega_{\text{quadro}} \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$(k_1 + k_2 - m_1 \cdot \omega^2) \cdot (k_2 - m_2 \cdot \omega^2) - k_2^2 = 0$$

$$(k_1 + k_2) \cdot k_2 - m_2 \cdot (k_1 + k_2) \cdot \omega^2 - k_2 \cdot m_1 \cdot \omega^2 + m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^4 - k_2^2 = 0$$

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^4 - [k_2 \cdot m_1 + m_2 \cdot (k_1 + k_2)] \cdot \omega^2 + k_1 \cdot k_2 = 0$$

$$\omega_{\text{quadro}} := \begin{bmatrix} \frac{k_2 \cdot m_1 + m_2 \cdot (k_1 + k_2) - \sqrt{[k_2 \cdot m_1 + m_2 \cdot (k_1 + k_2)]^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot k_1 \cdot k_2}}{2 \cdot m_1 \cdot m_2} \\ \frac{k_2 \cdot m_1 + m_2 \cdot (k_1 + k_2) + \sqrt{[k_2 \cdot m_1 + m_2 \cdot (k_1 + k_2)]^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot k_1 \cdot k_2}}{2 \cdot m_1 \cdot m_2} \end{bmatrix}$$

Pulsazioni proprie:

$$\omega_1 := \sqrt{\omega_{\text{quadro}_0}} = 25.263 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 := \sqrt{\omega_{\text{quadro}_1}} = 50.79 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Periodi propri:

$$T_1 := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1} = 0.249 \text{ s}$$

$$T_2 := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_2} = 0.124 \text{ s}$$

Frequenze proprie:

$$f_1 := \frac{1}{T_1} = 4.021 \cdot \text{Hz}$$

$$f_2 := \frac{1}{T_2} = 8.084 \cdot \text{Hz}$$

Modi propri di vibrare (autovettori):

$$Y_1 := \begin{bmatrix} \frac{k_2}{-(\omega_1)^2 \cdot m_1 + k_1 + k_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.463 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 := \begin{bmatrix} \frac{-(\omega_2)^2 \cdot m_2 + k_2}{k_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1.169 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'analisi con SAP2000, trascurando la massa delle aste e la rigidezza estensionale e tagliante dei piedritti, per le prime due frequenze fornisce

$$f_{1\text{SAP}} := 4.0207 \cdot \text{Hz} \quad \frac{f_1}{f_{1\text{SAP}}} = 100.002 \cdot \%$$

$$f_{2\text{SAP}} := 8.0834 \cdot \text{Hz} \quad \frac{f_2}{f_{2\text{SAP}}} = 100.002 \cdot \%$$

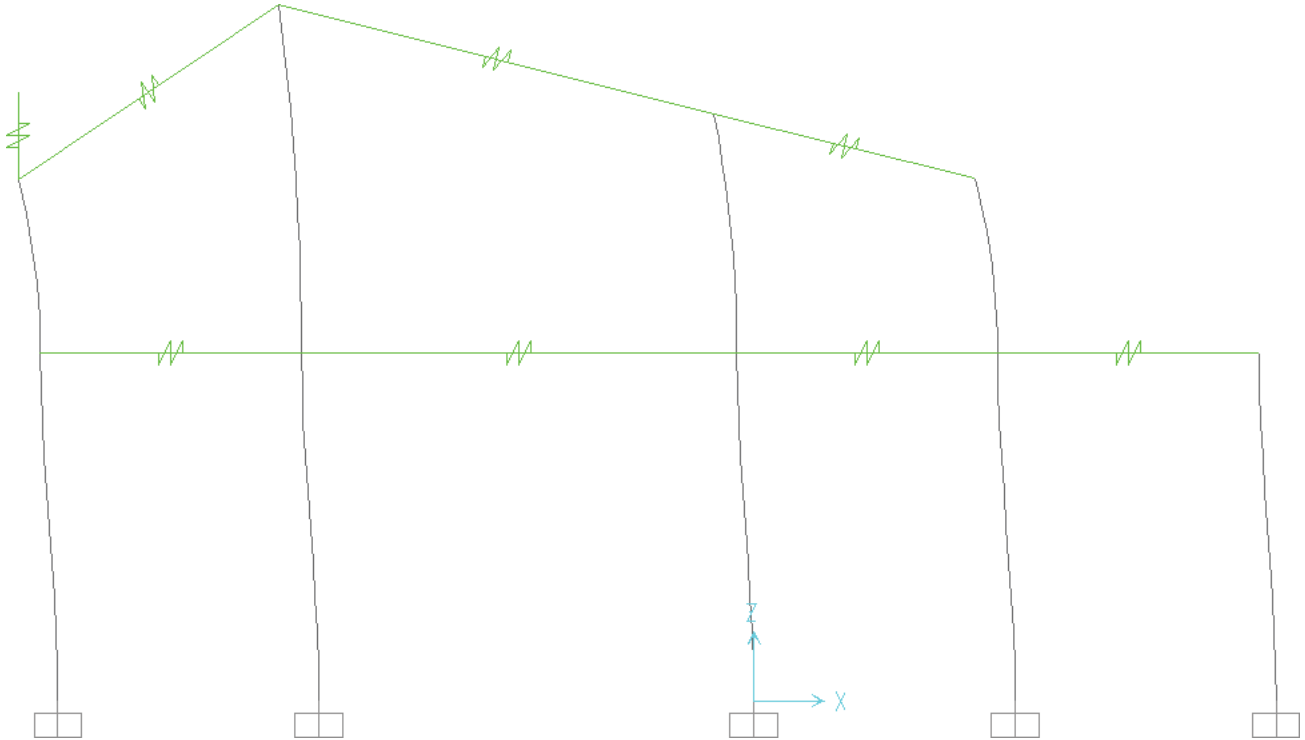
Tenendo conto, invece, di massa e rigidezza di tutte le aste, si trovano

$$f_{1\text{SAP}_-} := 3.814 \cdot \text{Hz} \quad \frac{f_1}{f_{1\text{SAP}_-}} = 105.421 \cdot \%$$

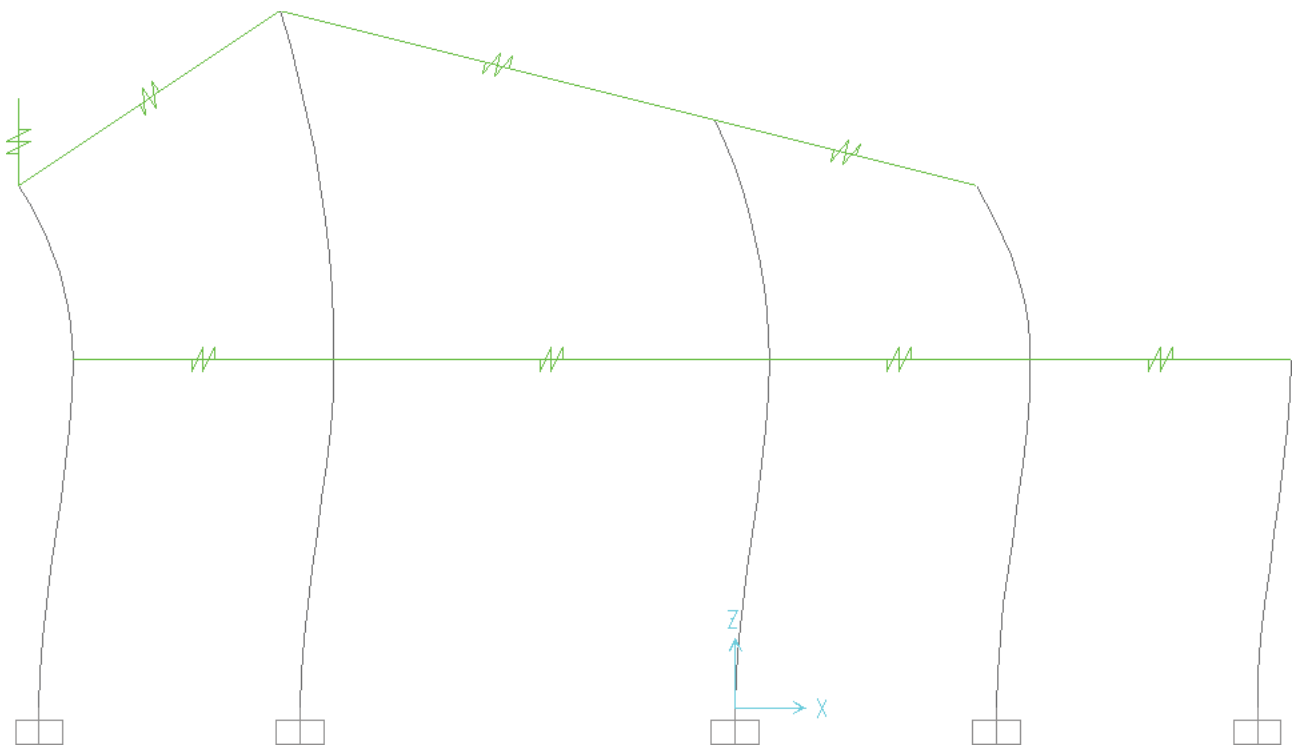
$$f_{2\text{SAP}_-} := 7.6513 \cdot \text{Hz} \quad \frac{f_2}{f_{2\text{SAP}_-}} = 105.649 \cdot \%$$



## Prova d'esame del 22 febbraio 2011 – Deformate modali



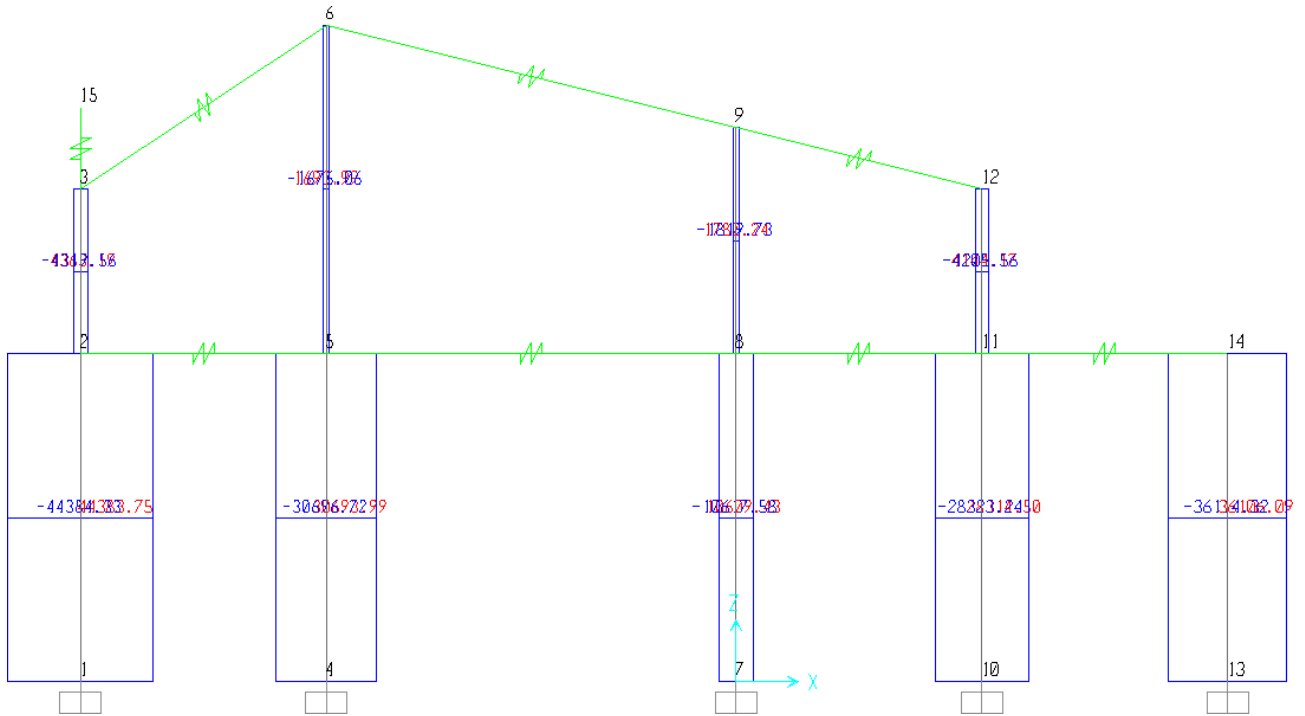
**Modo 1**



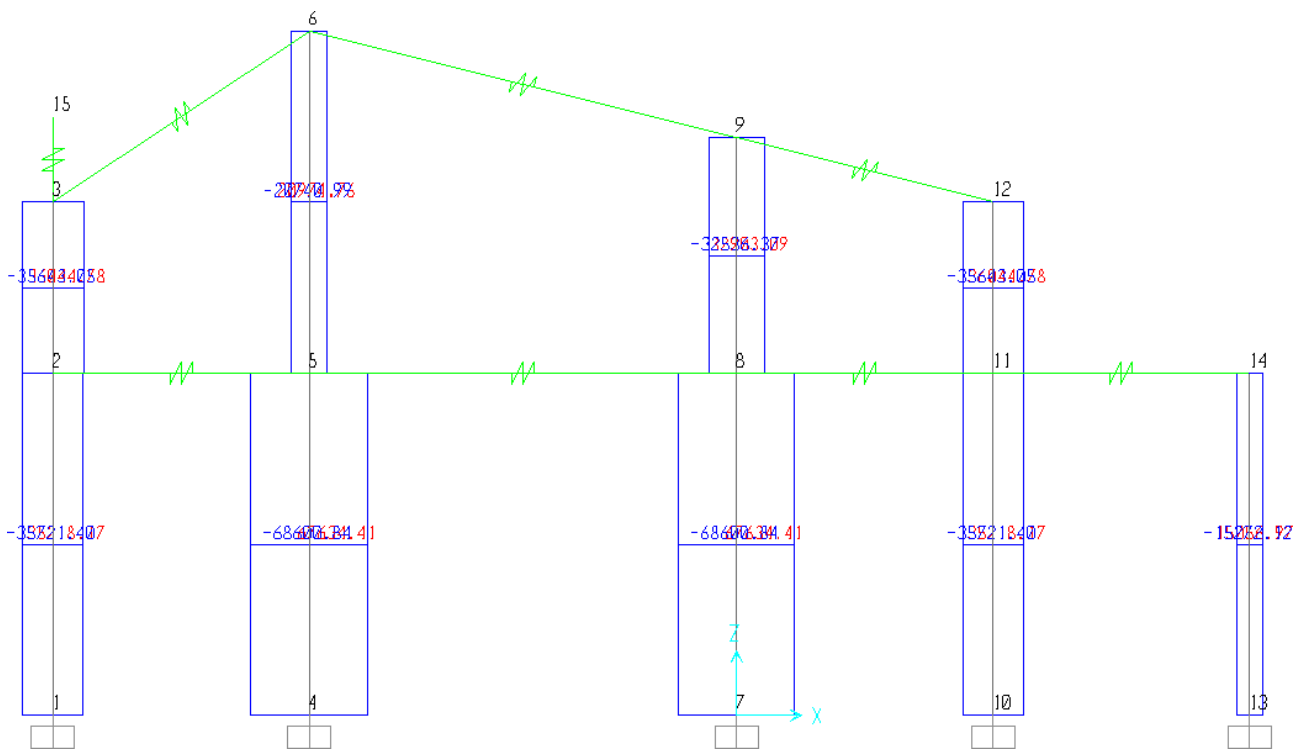
**Modo 2**



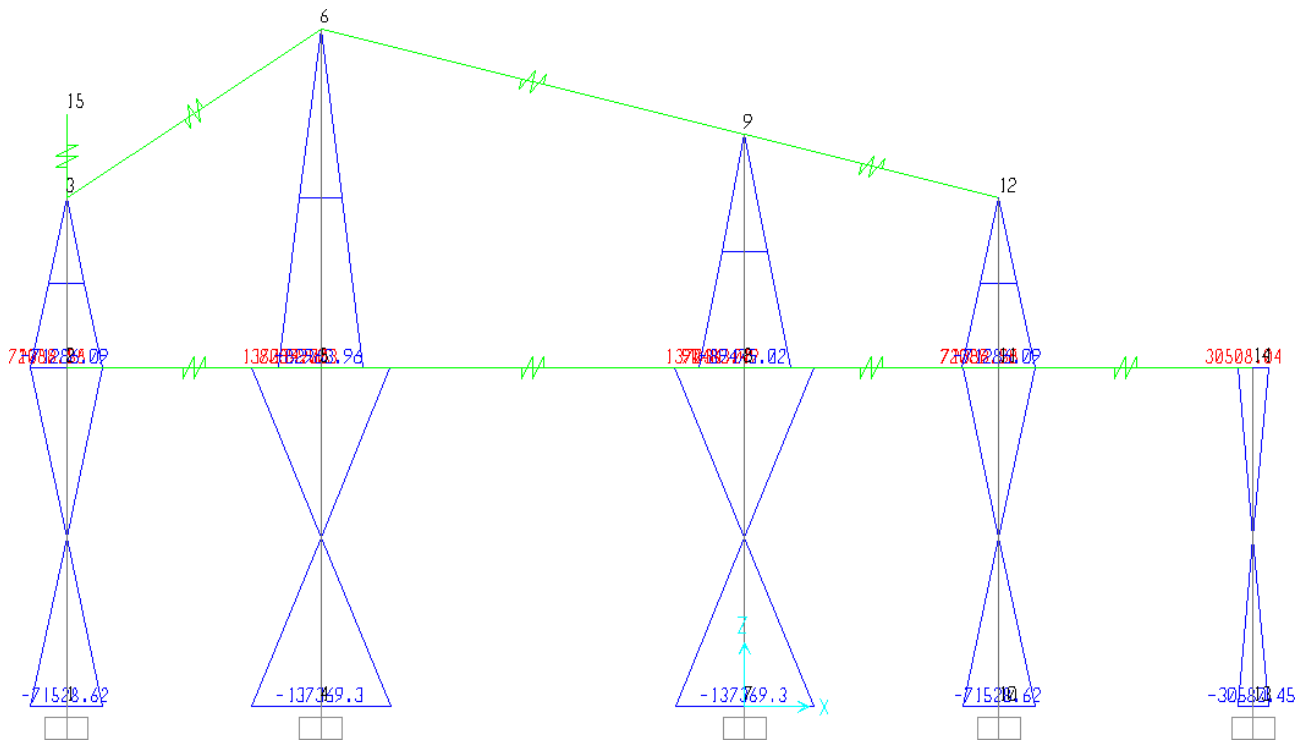
### Prova d'esame del 22 febbraio 2011 – Diagrammi CdS



Forza normale



Forza di taglio



**Momento flettente**