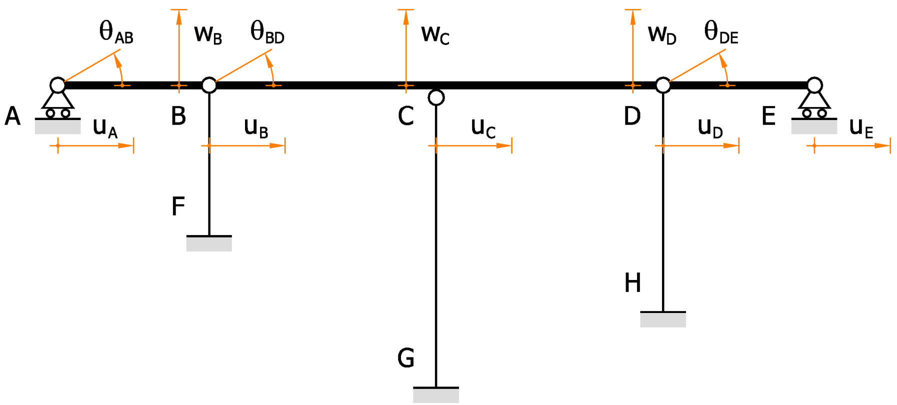
Prova d'esame del 19 luglio 2011 – Soluzione

Il sistema dato possiede 3 gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane lo spostamento orizzontale del nodo A e gli spostamenti verticali dei nodi B e D, che raccogliamo nel vettore

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_A \\ w_B \\ w_D \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

Esprimiamo gli spostamenti generalizzati del sistema in funzione delle coordinate lagrangiane:

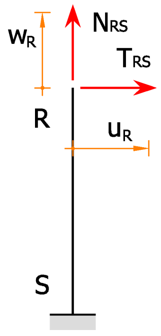
$$\begin{array}{lllll} u_A = v_1, & u_B = v_1, & u_C = v_1, & u_D = v_1, & u_E = v_1; \\ w_A = 0, & w_B = v_2, & w_C = (v_2 + v_3)/2, & w_D = v_3, & w_E = 0; \\ \theta_{AB} = \dfrac{v_2}{L_{AB}}, & \theta_{BD} = \dfrac{v_3 - v_2}{L_{BD}}, & & \theta_{DE} = -\dfrac{v_3}{L_{DE}}. & \end{array} \tag{2}$$



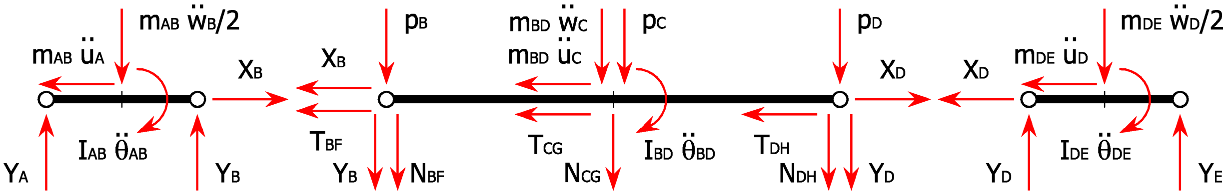
Spostamenti generalizzati

Ciascuna delle tre pile del ponte si comporta come una mensola che trasmette all'impalcato un'azione orizzontale e un'azione verticale, proporzionali ai corrispondenti spostamenti in sommità:

$$T_{RS} = 3\frac{EJ}{H_{RS}^3} v_R \quad \text{e} \quad N_{RS} = \frac{EA}{H_{RS}} w_R. \tag{3}$$



Pila



Equilibrio dinamico degli elementi dell'impalcato

Le equazioni del moto del sistema si ottengono scrivendo le tre equazioni di equilibrio dinamico (traslazione orizzontale, traslazione verticale e rotazione) per ciascuno dei tre elementi rigidi:

$$\begin{array}{lll}
AB: & BD: & DE: \\
X_B - m_{AB}\ddot{u}_A = 0, & X_B - X_D + T_{BF} + T_{CG} + T_{DH} + m_{BD}\ddot{u}_C = 0, & X_D + m_{DE}\ddot{u}_D = 0, \\
Y_A + Y_B - m_{AB}\ddot{w}_B/2 = 0, & Y_B + Y_D + N_{BF} + N_{CG} + N_{DH} + m_{BD}\ddot{w}_C + p_B + p_C + p_D = 0, & Y_D + Y_E - m_{DE}\ddot{w}_D/2 = 0, \\
Y_B L_{AB} - m_{AB}\dfrac{\ddot{w}_B}{2}\dfrac{L_{AB}}{2} - I_{AB}\ddot{\theta}_{AB} = 0; & (Y_B + N_{BF} + p_B)\dfrac{L_{BD}}{2} - (Y_D + N_{DH} + p_D)\dfrac{L_{BD}}{2} - I_{BD}\ddot{\theta}_{BD} = 0; & Y_D L_{DE} - m_{DE}\dfrac{\ddot{w}_D}{2}\dfrac{L_{DE}}{2} + I_{DE}\ddot{\theta}_{DE} = 0;
\end{array} \tag{4}$$

dove

$$I_{AB} = \frac{1}{12}m_{AB}L_{AB}^2, \quad I_{BD} = \frac{1}{12}m_{BD}L_{BD}^2, \quad I_{DE} = \frac{1}{12}m_{DE}L_{DE}^2 \tag{5}$$

sono i momenti di inerzia delle aste rigide. Sostituendo le Eq. (2), (3) e (5) nelle Eq. (4) si ottengono le equazioni in funzione delle coordinate lagrangiane del sistema. In particolare, dalle equazioni per AB e DE si ricavano

$$\begin{array}{ll}
X_B = m_{AB}\ddot{v}_1, & X_D = -m_{DE}\ddot{v}_1, \\
Y_B = \dfrac{1}{3}m_{AB}\ddot{v}_2; & Y_D = \dfrac{1}{3}m_{DE}\ddot{v}_3;
\end{array} \tag{6}$$

che, sostituite nelle equazioni per BD, dopo alcune semplificazioni, forniscono

$$\begin{aligned}
&(m_{AB} + m_{BD} + m_{DE})\ddot{v}_1 + 3EJ\left(\frac{1}{H_{BF}^3} + \frac{1}{H_{CG}^3} + \frac{1}{H_{DH}^3}\right)v_1 = 0, \\
&(2m_{AB} + 3m_{BD})\ddot{v}_2 + (3m_{BD} + 2m_{DE})\ddot{v}_3 + \left(6\frac{EA}{H_{BF}} + 3\frac{EA}{H_{CG}}\right)v_2 + \left(3\frac{EA}{H_{CG}} + 6\frac{EA}{H_{DH}}\right)v_3 = -6p_B - 6p_C - 6p_D, \\
&(2m_{AB} + m_{BD})\ddot{v}_2 - (m_{BD} + 2m_{DE})\ddot{v}_3 + 6\frac{EA}{H_{BF}}v_2 - 6\frac{EA}{H_{DH}}v_3 = -6p_B + 6p_D.
\end{aligned} \tag{7}$$

La prima equazione, che rappresenta l'equilibrio alla traslazione orizzontale di BD, risulta indipendente dalle altre due. Le rimanenti equazioni presentano matrici di massa e di rigidezza che non sono simmetriche. Per rendere simmetriche tali matrici *(operazione che tuttavia non è indispensabile ai fini del calcolo degli autovalori)*, sommiamo e poi sottraiamo fra loro la seconda e la terza equazione:

$$\begin{aligned} &4(m_{AB}+m_{BD})\ddot{v}_2+2m_{BD}\ddot{v}_3+3EA\left(\frac{4}{H_{BF}}+\frac{1}{H_{CG}}\right)v_2+3\frac{EA}{H_{CG}}v_3=-12p_B-6p_C, \\ &2m_{BD}\ddot{v}_2+4(m_{BD}+m_{DE})\ddot{v}_3+3\frac{EA}{H_{CG}}v_2+3EA\left(\frac{1}{H_{CG}}+\frac{4}{H_{DH}}\right)v_3=-6p_C-12p_D. \end{aligned} \tag{8}$$

In conclusione, le equazioni di equilibrio dinamico in forma matriciale si scrivono come segue:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} m_{AB}+m_{BD}+m_{DE} & 0 & 0 \\ 0 & 4(m_{AB}+m_{BD}) & 2m_{BD} \\ 0 & 2m_{BD} & 4(m_{BD}+m_{DE}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} + \\ &+\begin{bmatrix} 3EJ\left(\frac{1}{H_{BF}^3}+\frac{1}{H_{CG}^3}+\frac{1}{H_{DH}^3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 3EA\left(\frac{4}{H_{BF}}+\frac{1}{H_{CG}}\right) & 3\frac{EA}{H_{CG}} \\ 0 & 3\frac{EA}{H_{CG}} & 3EA\left(\frac{1}{H_{CG}}+\frac{4}{H_{DH}}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = -6\begin{Bmatrix} 0 \\ 2p_B+p_C \\ p_C+2p_D \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{9}$$

Prova d'esame di Dinamica delle Strutture del 19 luglio 2011

Docente: Dott. Ing. Paolo S. VALVO

Matricola dello studente:

$M := 400000$

Lunghezza delle campate

$L_{AB} := 20$ $\quad L_{BD} := 60$ $\quad L_{DE} := 20$ $\quad L_{tot} := L_{AB} + L_{BD} + L_{DE} = 100$

Altezza delle pile

$H_{BF} := 20$ $\quad H_{CG} := 40$ $\quad H_{DH} := 30$

Sezione trasversale delle pile

$b := 6$ $\quad h := 2$ $\quad t := 0.50$

$A := b \cdot h - (b - 2 \cdot t) \cdot (h - 2 \cdot t) = 7.000$ $\quad J := \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 - \frac{1}{12} \cdot (b - 2 \cdot t) \cdot (h - 2 \cdot t)^3 = 3.583$

Modulo di Young e densità del materiale (calcestruzzo)

$E := 30 \cdot 10^9$ $\quad \rho := 2500$

Masse delle travi di impalcato

$m_{AB} := M = 400000$ $\quad m_{BD} := 3 \cdot M = 1200000$ $\quad m_{DE} := M = 400000$

Momenti di inerzia delle travi di impalcato

$I_{AB} := \frac{1}{12} \cdot m_{AB} \cdot L_{AB}^2 = 13333333.333$ $\quad I_{BD} := \frac{1}{12} \cdot m_{BD} \cdot L_{BD}^2 = 360000000$

$I_{DE} := \frac{1}{12} \cdot m_{DE} \cdot L_{DE}^2 = 13333333.333$

Matrice di massa

$$M := \begin{bmatrix} m_{AB} + m_{BD} + m_{DE} & 0 & 0 \\ 0 & 4 \cdot (m_{AB} + m_{BD}) & 2 \cdot m_{BD} \\ 0 & 2 \cdot m_{BD} & 4 \cdot (m_{BD} + m_{DE}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2000000 & 0 & 0 \\ 0 & 6400000 & 2400000 \\ 0 & 2400000 & 6400000 \end{pmatrix}$$

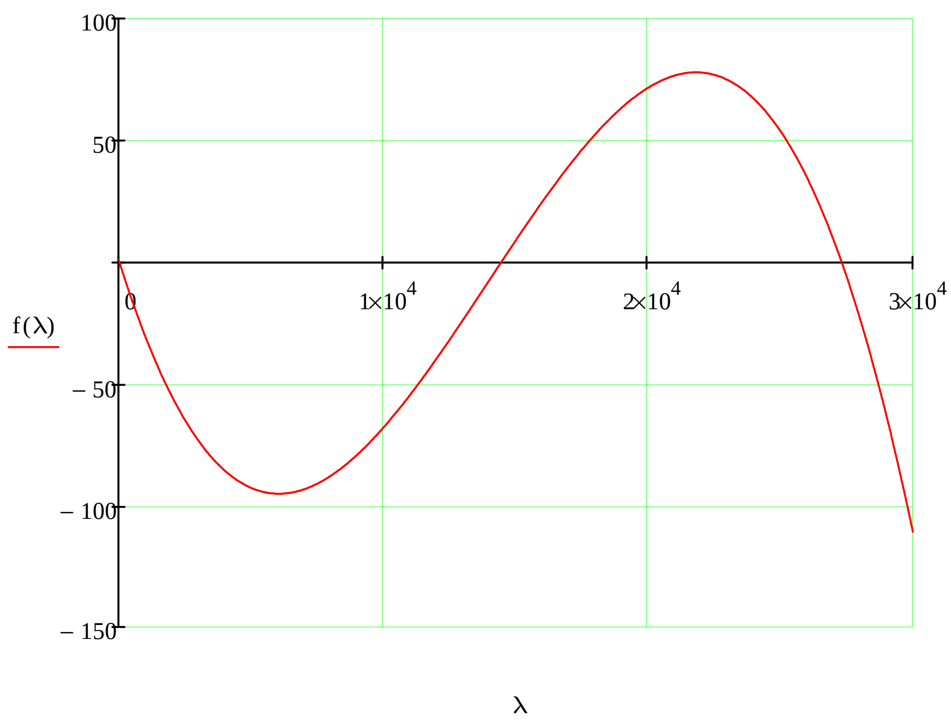
Matrice di rigidezza

$$K := \begin{bmatrix} 3\cdot E\cdot J\cdot\left(\frac{1}{H_{BF}^{3}}+\frac{1}{H_{CG}^{3}}+\frac{1}{H_{DH}^{3}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot E\cdot A\cdot\left(\frac{4}{H_{BF}}+\frac{1}{H_{CG}}\right) & 3\cdot\frac{E\cdot A}{H_{CG}} \\ 0 & 3\cdot\frac{E\cdot A}{H_{CG}} & 3\cdot E\cdot A\cdot\left(\frac{1}{H_{CG}}+\frac{4}{H_{DH}}\right) \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 57296006.944 & 0 & 0 \\ 0 & 141750000000 & 15750000000 \\ 0 & 15750000000 & 99750000000 \end{pmatrix}$$

Ricerca degli autovalori

$$f(\lambda) := \frac{|K-\lambda\cdot M|}{|K|} \qquad |K| = 7.959\times 10^{29} \qquad |M| = 7.040\times 10^{19}$$



Vettore dei coefficienti dell'equazione caratteristica

$$\text{vec\_coeffs} := f(\lambda)\ \text{coeffs} \ \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.035012266587147276381 \\ 0.00000369633778408026064 31 \\ -8.845026931164499181\text{e-}11 \end{pmatrix}$$

Autovalori generalizzati

$$\lambda := \text{polyroots}(\text{vec\_coeffs}) = \begin{pmatrix} 28.6 \\ 14449.7 \\ 27311.7 \end{pmatrix}$$

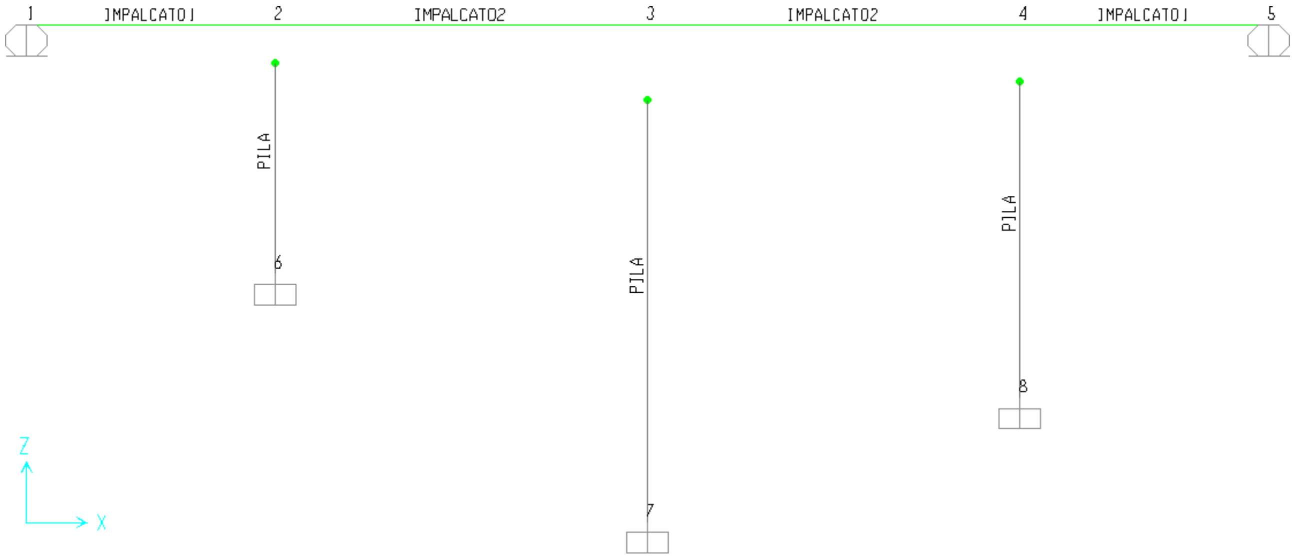
Pulsazioni, frequenze e periodi propri

$$\omega := \sqrt{\lambda} = \begin{pmatrix} 5.352 \\ 120.207 \\ 165.263 \end{pmatrix} \qquad f := \frac{\omega}{2\cdot\pi} = \begin{pmatrix} 0.852 \\ 19.131 \\ 26.302 \end{pmatrix} \qquad T := \frac{1}{f} = \begin{pmatrix} 1.173904 \\ 0.052270 \\ 0.038019 \end{pmatrix}$$

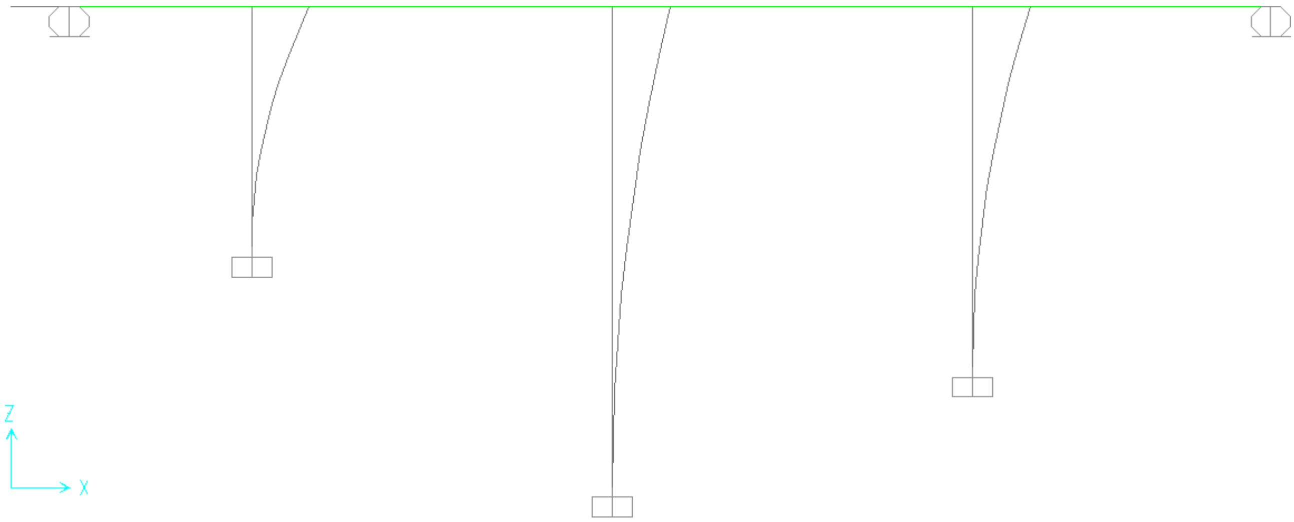
La prima pulsazione propria si poteva calcolare direttamente

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{3\cdot E\cdot J\cdot\left(\frac{1}{H_{BF}^{\ 3}} + \frac{1}{H_{CG}^{\ 3}} + \frac{1}{H_{DH}^{\ 3}}\right)}{m_{AB} + m_{BD} + m_{DE}}} = 5.352$$

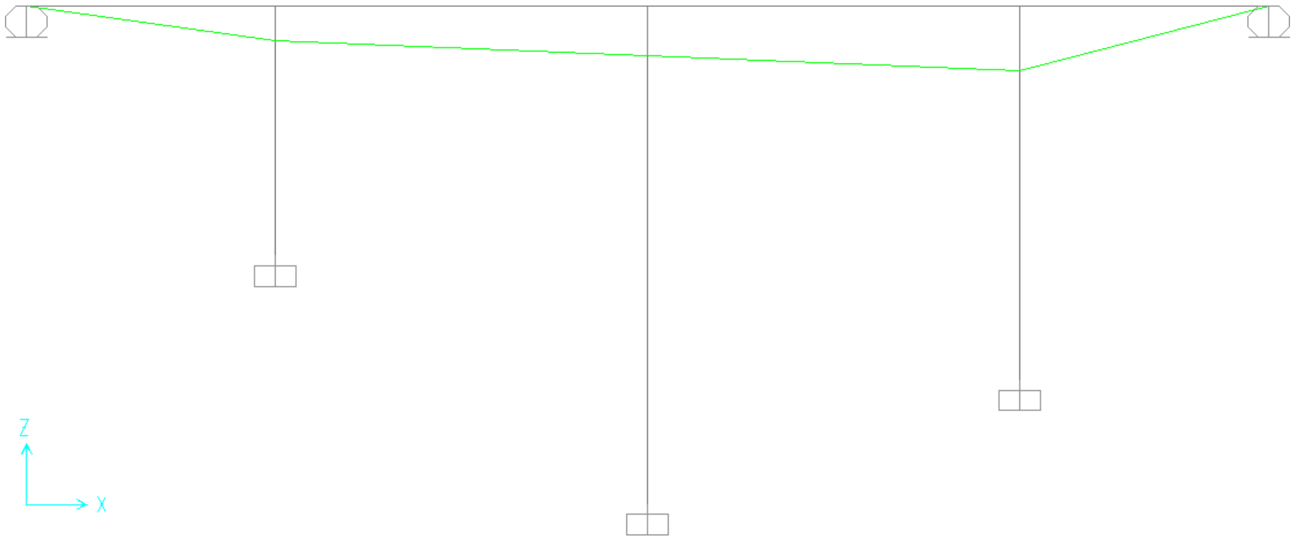
Prova d'esame del 19 luglio 2011 – Risultati analisi FEM



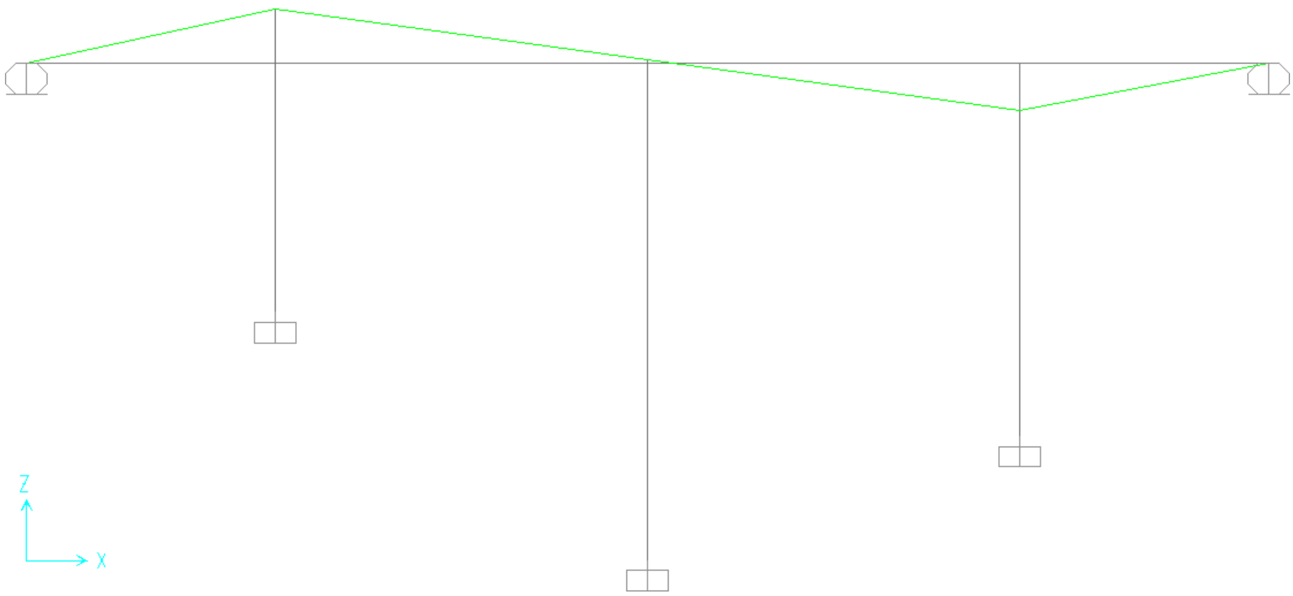
Configurazione di riferimento



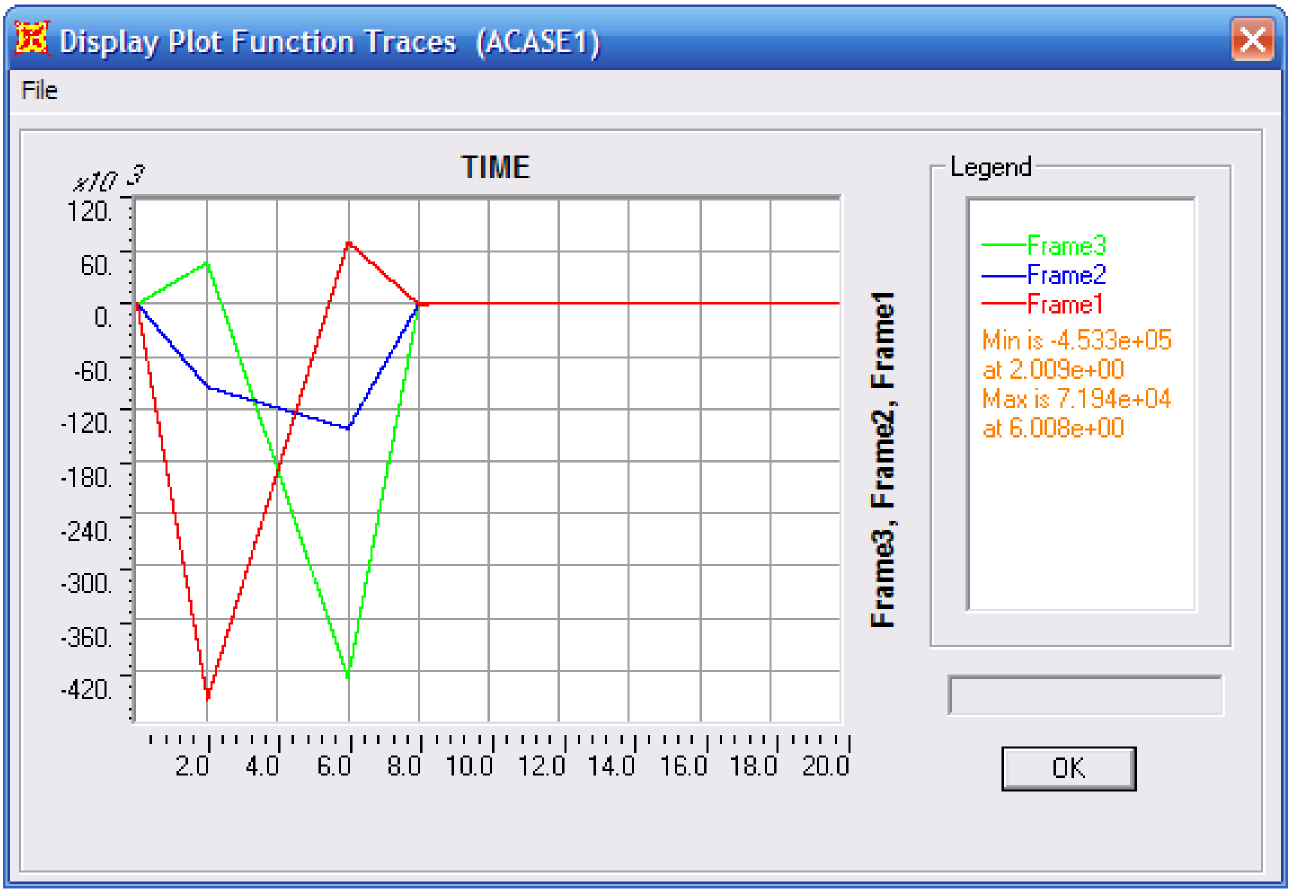
Forma modale – Modo 1 (f_1 = 0.712 Hz)



Forma modale – Modo 2 (f_2 = 10.374 Hz)



Forma modale – Modo 3 (f_3 = 21.992 Hz)



Forza normale nelle pile in funzione del tempo