Prova d'esame del 7 novembre 2011 – Soluzione

La struttura data può essere modellata come un sistema a 4 gradi di libertà, considerando la massa distribuita lungo le aste come se fosse concentrata nei nodi. Scegliamo come coordinate lagrangiane le componenti orizzontale e verticale di spostamento dei nodi B e C, che raccogliamo nel vettore

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ u_C \\ v_C \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

Le equazioni di equilibrio dinamico si possono scrivere in forma matriciale come segue

$$[M]\{\ddot{v}\} + [K]\{v\} = \begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

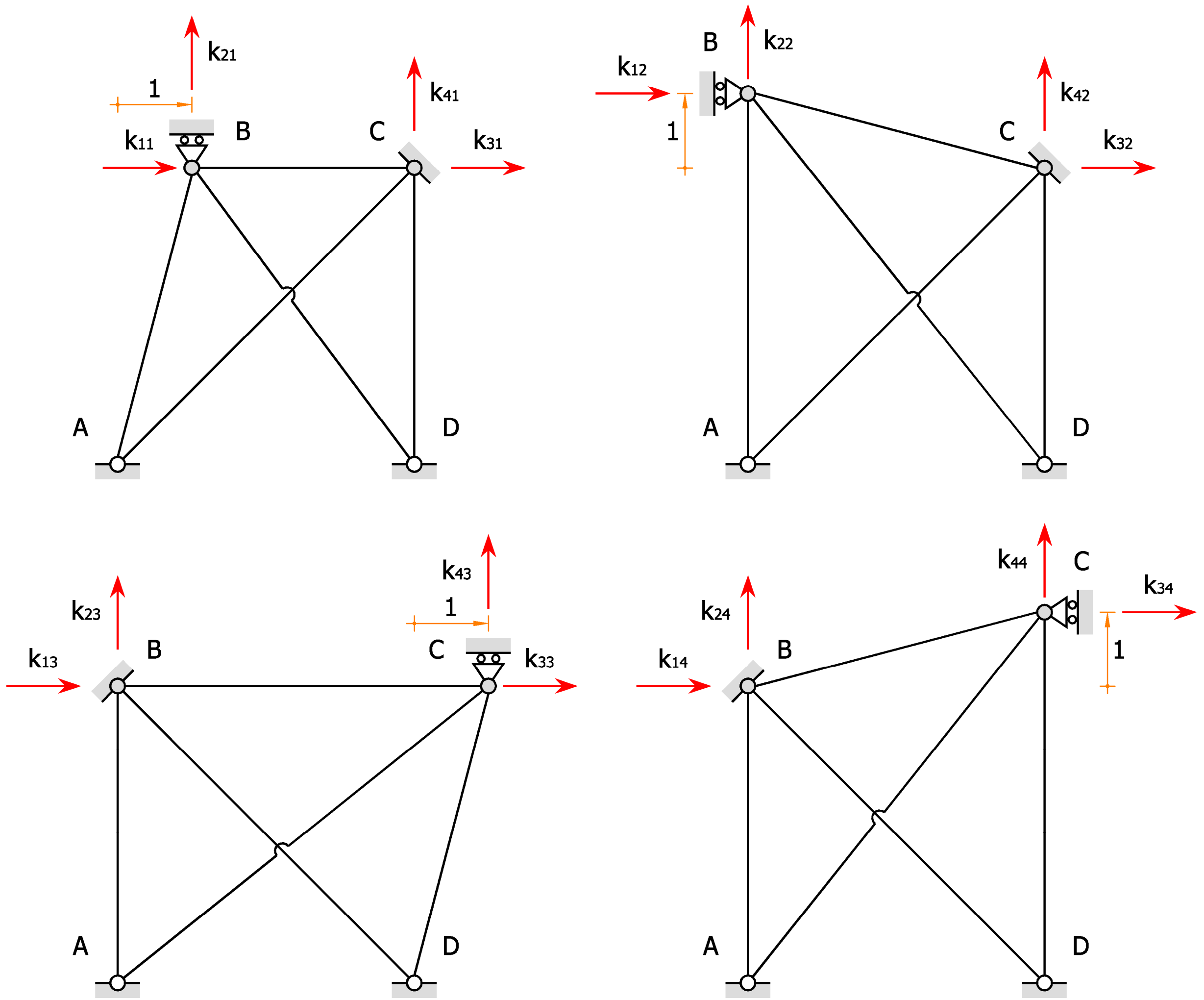
dove

$$[M] = [m + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\rho AL)] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

è la matrice di massa della struttura e

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1+\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1+\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & 1+\frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \tag{4}$$

è la matrice di rigidezza della struttura. Gli elementi di quest'ultima matrice possono essere ottenuti ricordando il significato fisico dei suoi elementi: k_{ij} è la forza applicata in corrispondenza della coordinata i-esima, quando si imponga uno spostamento unitario alla coordinata j-esima e siano nulli gli spostamenti corrispondenti a tutte le altre coordinate. Pertanto, per determinare i k_{ij} si sono analizzati i sistemi illustrati nella figura seguente.



Determinazione degli elementi della matrice di rigidezza

Prova d'esame di Dinamica delle Strutture del 7 novembre 2011

Docente: Dott. Ing. Paolo S. VALVO

Matricola dello studente:

$$M := 400000$$

Lunghezza delle aste

$$L := 4$$

Modulo di Young e densità del materiale (acciaio)

$$E := 210 \cdot 10^{9} \qquad \rho := 7850$$

Diametro esterno, spessore e area della sezione trasversale delle aste

$$D_e := \frac{M}{2000} \cdot 10^{-3} = 0.200 \qquad h := \frac{M}{40000} \cdot 10^{-3} = 0.010 \qquad A := \frac{\pi}{4} \cdot \left[D_e^{2} - \left(D_e - 2 \cdot h \right)^{2} \right] = 0.005969$$

Masse nodali (inclusa la massa delle aste)

$$m_B := 50000 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \rho \cdot A \cdot L = 50320.0 \qquad m_C := 50000 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \rho \cdot A \cdot L = 50320.0$$

Matrice di rigidezza

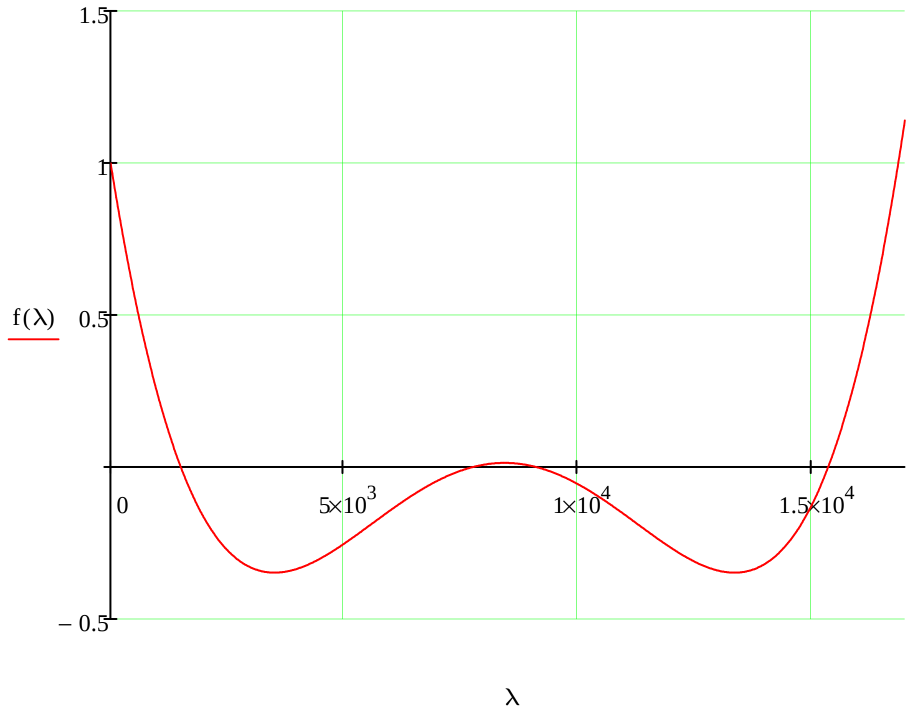
$$K := \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \cdot \frac{E \cdot A}{L} = \begin{pmatrix} 424168260 & -110794393 & -313373867 & 0 \\ -110794393 & 424168260 & 0 & 0 \\ -313373867 & 0 & 424168260 & 11079 \\ 0 & 0 & 110794393 & 42416 \end{pmatrix}$$

Matrice di massa

$$M := \begin{pmatrix} m_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50320.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 50320.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 50320.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 50320.0 \end{pmatrix}$$

Ricerca degli autovalori

$$f(\lambda) := \frac{|K - \lambda \cdot M|}{|K|} \qquad |K| = 1.044 \times 10^{34} \qquad |M| = 6.412 \times 10^{18}$$



Vettore dei coefficienti dell'equazione caratteristica

$$\text{vec\_coeffs} := f(\lambda) \text{ coeffs } \rightarrow \begin{pmatrix} 0.9999999999999999999 \\ -0.00096981400555326096849 \\ 2.3214619175770843256\text{e-}7 \\ -2.0715611535975116134\text{e-}11 \\ 6.1438396760604771882\text{e-}16 \end{pmatrix}$$

Autovalori generalizzati

$$\lambda := \text{polyroots}(\text{vec\_coeffs}) = \begin{pmatrix} 1502.0 \\ 7729.6 \\ 9129.2 \\ 15356.9 \end{pmatrix}$$

Pulsazioni, frequenze e periodi propri

$$\omega := \sqrt{\lambda} = \begin{pmatrix} 38.755 \\ 87.918 \\ 95.547 \\ 123.923 \end{pmatrix} \qquad f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \begin{pmatrix} 6.168 \\ 13.993 \\ 15.207 \\ 19.723 \end{pmatrix} \qquad T := \frac{1}{f} = \begin{pmatrix} 0.162124 \\ 0.071466 \\ 0.065760 \\ 0.050702 \end{pmatrix}$$

Ricerca degli autovettori

Primo autovettore

$w := 1 \qquad x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$$\left[\left(K - \lambda_1 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_1 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_1 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_2 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_1 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_3 = 0$$

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$a_1 := \mathrm{Find}(w, x, y, z) \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 0.674 \\ 0.214 \\ 0.674 \\ -0.214 \end{pmatrix}$$

Secondo autovettore

$w := 1 \qquad x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$$\left[\left(K - \lambda_2 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_1 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_2 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_2 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_2 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_3 = 0$$

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$a_2 := \mathrm{Find}(w, x, y, z) \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0.214 \\ 0.674 \\ -0.214 \\ 0.674 \end{pmatrix}$$

Terzo autovettore

$w := 1 \qquad x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$$\left[\left(K - \lambda_3 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_1 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_3 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_2 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_3 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_3 = 0$$

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$a_3 := \mathrm{Find}(w, x, y, z) \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0.214 \\ -0.674 \\ 0.214 \\ 0.674 \end{pmatrix}$$

Quarto autovettore

$w := 1 \qquad x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$$\left[\left(K - \lambda_4 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_1 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_4 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_2 = 0 \qquad \left[\left(K - \lambda_4 \cdot M\right) \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_3 = 0$$

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$a_4 := \mathrm{Find}(w, x, y, z) \qquad a_4 = \begin{pmatrix} -0.674 \\ 0.214 \\ 0.674 \\ 0.214 \end{pmatrix}$$

Autovettori di norma unitaria

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0.674 \\ 0.214 \\ 0.674 \\ -0.214 \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0.214 \\ 0.674 \\ -0.214 \\ 0.674 \end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0.214 \\ -0.674 \\ 0.214 \\ 0.674 \end{pmatrix} \qquad a_4 = \begin{pmatrix} -0.674 \\ 0.214 \\ 0.674 \\ 0.214 \end{pmatrix}$$

Normalizzazione rispetto alla matrice di massa

$$\mu_1 := a_1^T \cdot M \cdot a_1 \qquad \mu_2 := a_2^T \cdot M \cdot a_2 \qquad \mu_3 := a_3^T \cdot M \cdot a_3 \qquad \mu_4 := a_4^T \cdot M \cdot a_4$$

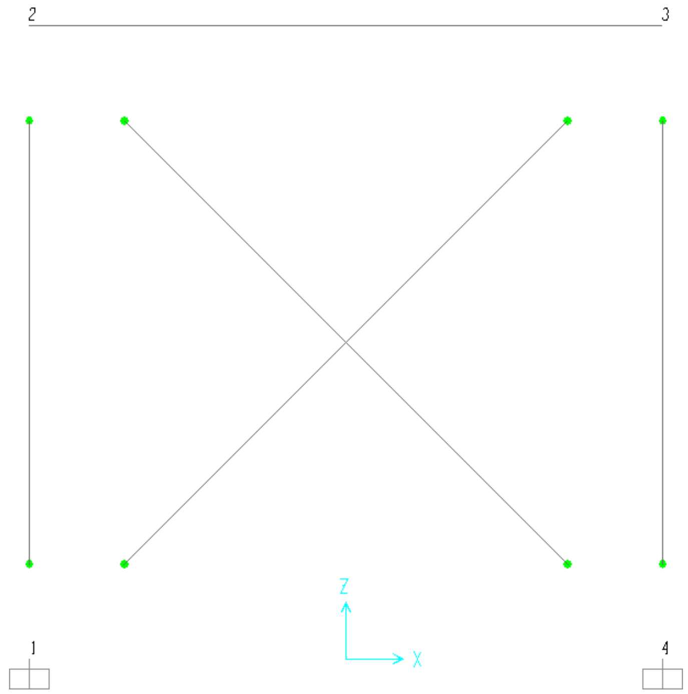
$$\mu_1 = 50319.959 \qquad \mu_2 = 50319.959 \qquad \mu_3 = 50319.959 \qquad \mu_4 = 50319.959$$

$$\phi_1 := \frac{a_1}{\sqrt{\mu_1}} \qquad \phi_2 := \frac{a_2}{\sqrt{\mu_2}} \qquad \phi_3 := \frac{a_3}{\sqrt{\mu_3}} \qquad \phi_4 := \frac{a_4}{\sqrt{\mu_4}}$$

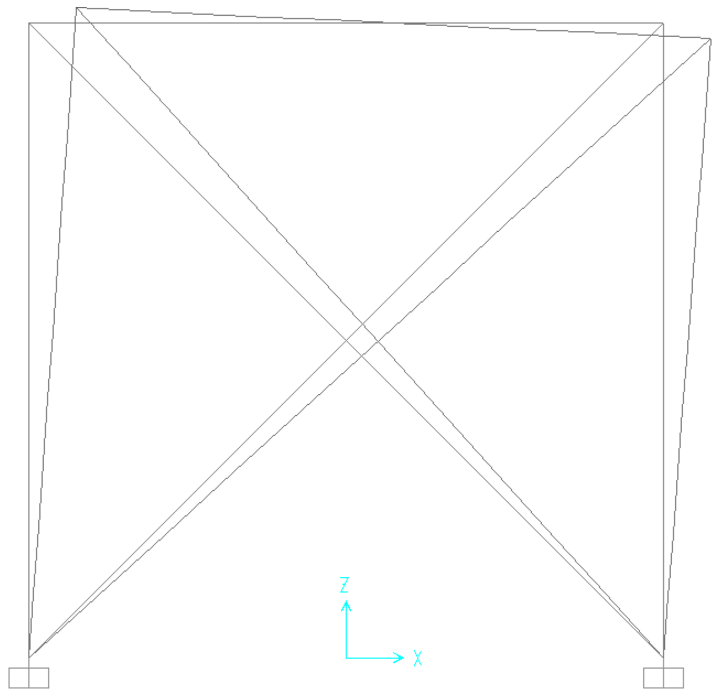
$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0.003004 \\ 0.000955 \\ 0.003004 \\ -0.000955 \end{pmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0.000955 \\ 0.003004 \\ -0.000955 \\ 0.003004 \end{pmatrix} \qquad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0.000955 \\ -0.003004 \\ 0.000955 \\ 0.003004 \end{pmatrix} \qquad \phi_4 = \begin{pmatrix} -0.003004 \\ 0.000955 \\ 0.003004 \\ 0.000955 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ 4393 \\ 8260 \end{matrix}\right)$$

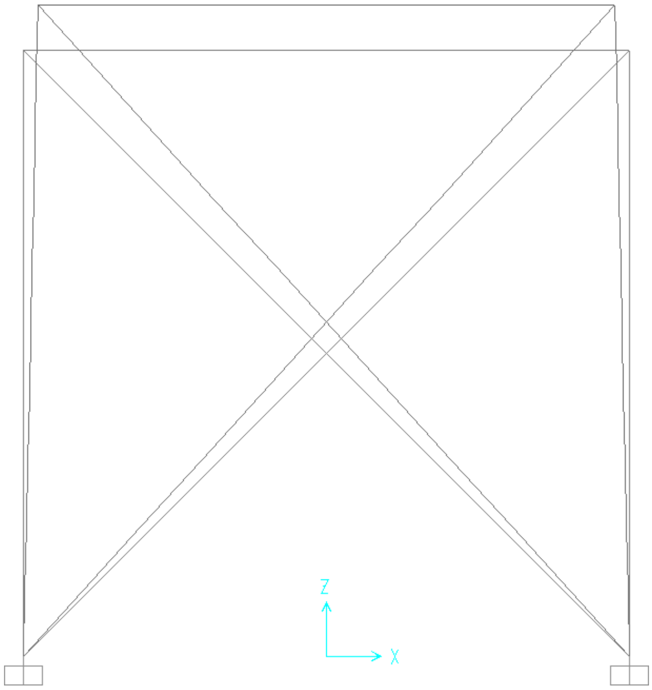
Prova d'esame del 7 novembre 2011 – Risultati analisi FEM



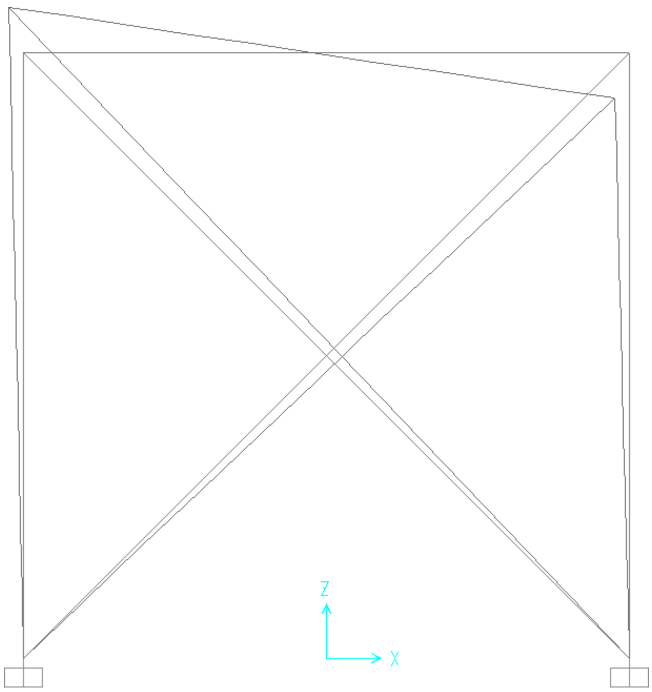
Configurazione di riferimento



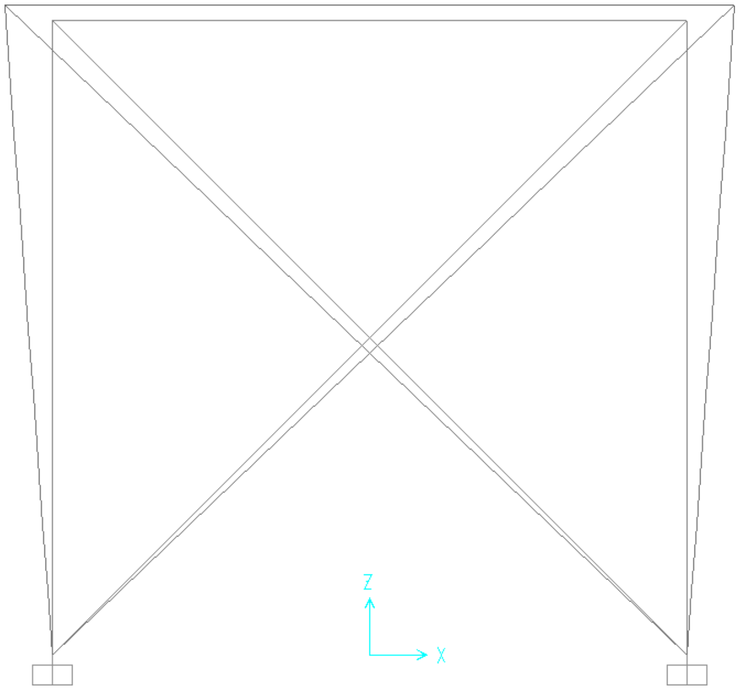
Forma modale – Modo 1 (f_1 = 6.168 Hz)



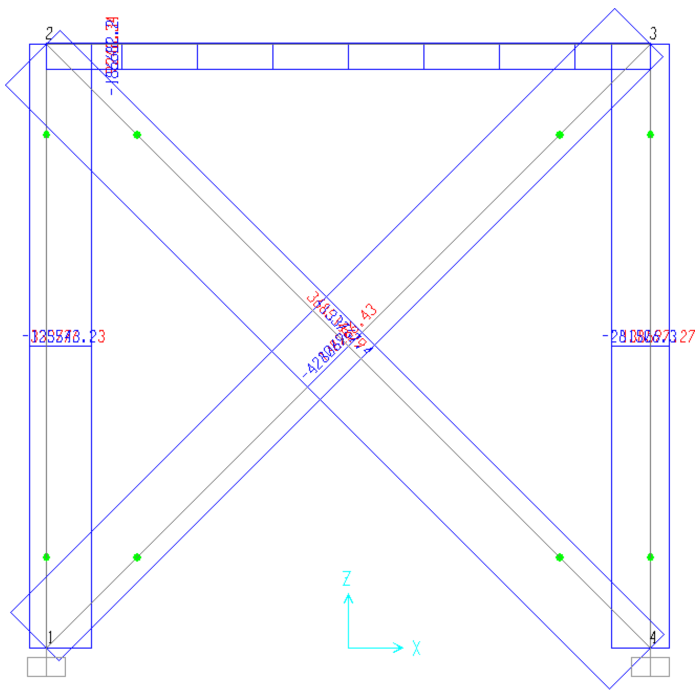
Forma modale – Modo 2 (f_2 = 13.993 Hz)



Forma modale – Modo 3 (f_3 = 15.207 Hz)



Forma modale – Modo 4 (f_4 = 19.723 Hz)



Inviluppo della forza normale nelle aste (N_{min} = –428.1 kN, N_{max} = 368.5 kN)