Corso di Scienza delle Costruzioni
(Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettrica)

Corso di Meccanica Analitica e dei Continui
(Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza Industriale)

docente: Prof. S. Bennati
esercitatori: Ing. R. Barsotti & P. Valvo

Temi d’esame

A.A. 2007/2008

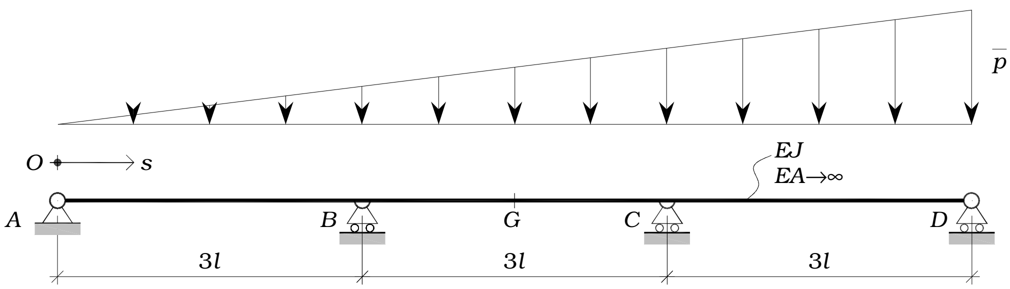
Problema A.1

La trave continua *ABCD* rappresentata in figura ha rigidezza flessionale costante EJ. La trave è soggetta ad un carico distribuito variabile con la legge

$$p(s) = \frac{\overline{p}}{9l}\, s$$

dove $s \in [0, 9l]$ è l'ascissa misurata a partire dall'estremo *A*.

a) Trovare le reazioni vincolari sugli appoggi.
b) Calcolare le caratteristiche di sollecitazione e tracciare i relativi diagrammi quotati.
c) Calcolare lo spostamento verticale della sezione di mezzeria *G*.



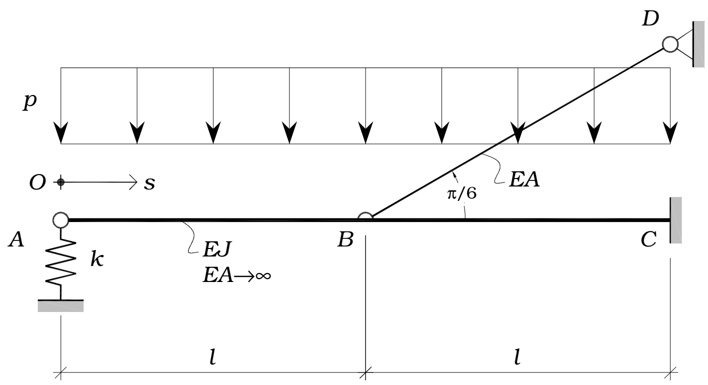
Problema A.2

La trave *ABC* rappresentata in figura ha rigidezza flessionale costante *EJ* e rigidezza estensionale infinita. In *A* è presente un appoggio elastico di costante *k*, in *C* il vincolo è costituito da un incastro. Il tirante *BD* ha rigidezza estensionale *EA* e lunghezza iniziale

$$L_{BD} = (1-\varepsilon)\frac{2l}{\sqrt{3}}$$

inferiore alla distanza tra i punti *B* e *D* nella configurazione di riferimento. La trave è soggetta ad un carico distribuito uniforme *p*.

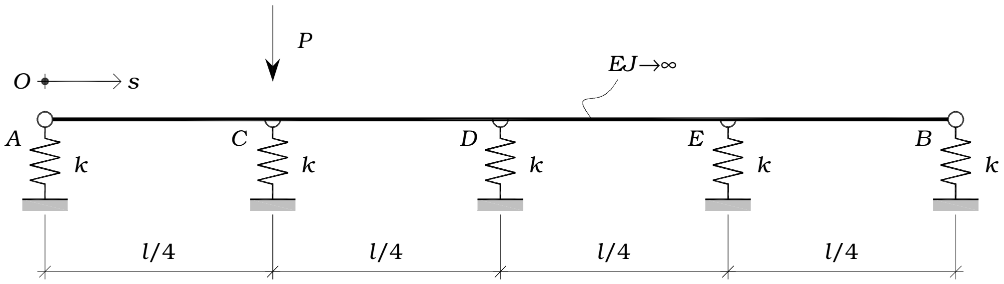
a) Risolvere il problema con il metodo della linea elastica, trovando le reazioni vincolari e le caratteristiche di sollecitazione.
b) Tracciare i diagrammi quotati delle CdS.
c) Determinare il valore di ε tale che lo spostamento di *B* sia nullo (in presenza del carico *p*).



Problema A.3

La trave *ACDEB* rappresentata in figura ha rigidezza flessionale infinita. I vincoli sono costituiti da cinque appoggi elastici verticali di costante k. La trave è soggetta ad un carico verticale P posto a distanza $l/4$ dall'estremo A.

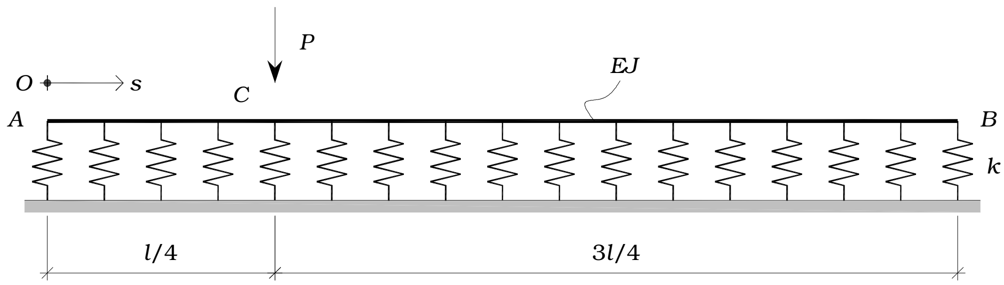
a) Risolvere il problema con il metodo degli spostamenti, trovando le reazioni vincolari e le caratteristiche di sollecitazione.
b) Tracciare i diagrammi quotati delle CdS.
c) Dire come cambia la soluzione nel caso "non lineare", in cui le molle reagiscono solo a compressione.



Problema A.4

La trave AB rappresentata in figura ha rigidezza flessionale EJ. I vincoli sono costituiti da un "letto di molle" verticali distribuite di costante k [F/L^2]. La trave è soggetta ad un carico verticale P posto a distanza $l/4$ dall'estremo A.

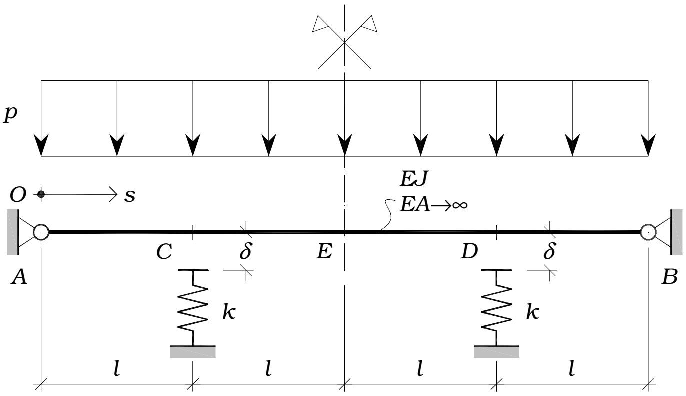
a) Risolvere il problema con il metodo della linea elastica, trovando le reazioni vincolari elastiche delle molle e le caratteristiche di sollecitazione nella trave.
b) Tracciare i diagrammi quotati delle reazioni vincolari e delle CdS.
c) Calcolare lo spostamento verticale della sezione C di applicazione del carico.



Problema A.5

La trave *ABCD* rappresentata in figura ha rigidezza flessionale costante *EJ* e rigidezza estensionale infinita. In *A* e in *B* i vincoli sono costituiti da cerniere, in *C* e in *D* sono presenti due appoggi elastici di costante *k*. Questi ultimi, tuttavia, non sono inizialmente in contatto con la trave, ma ne distano di un tratto δ. La trave è soggetta ad un carico distribuito uniforme *p*.

a) Determinare il valore del carico distribuito p_0 per il quale la trave entra in contatto con i vincoli elastici.
b) Risolvere il problema per un valore del carico $p > p_0$, trovando le reazioni vincolari e le caratteristiche di sollecitazione.
c) Tracciare i diagrammi quotati delle CdS.

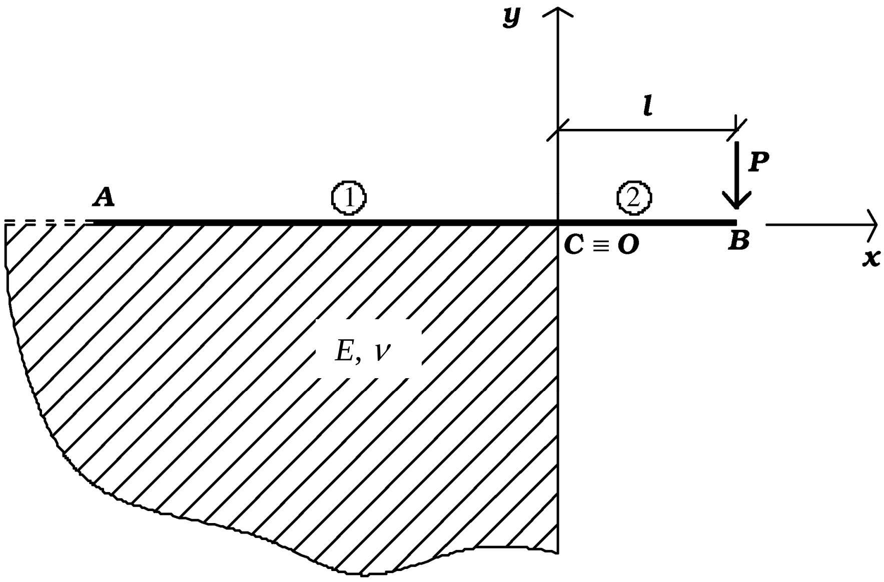


Problema B.1

Una trave flessibile ma inestensibile *ACB* è incollata ad un cuneo elastico di vertice $O \equiv C$, il cui materiale ha costanti elastiche ingegneristiche E e ν. Trave e cuneo sono supposti, per semplicità, infinitamente estesi.

a) Scrivere sia le equazioni differenziali e le condizioni al bordo che definiscono il problema di equilibrio per i tratti *AC* ($s \in (-\infty, 0]$) e *CB* ($s \in (0, l]$) della trave, sia le condizioni al bordo che definiscono il problema di equilibrio per il cuneo elastico.

b) Come cambia il problema se la trave *ACB* viene supposta perfettamente rigida?

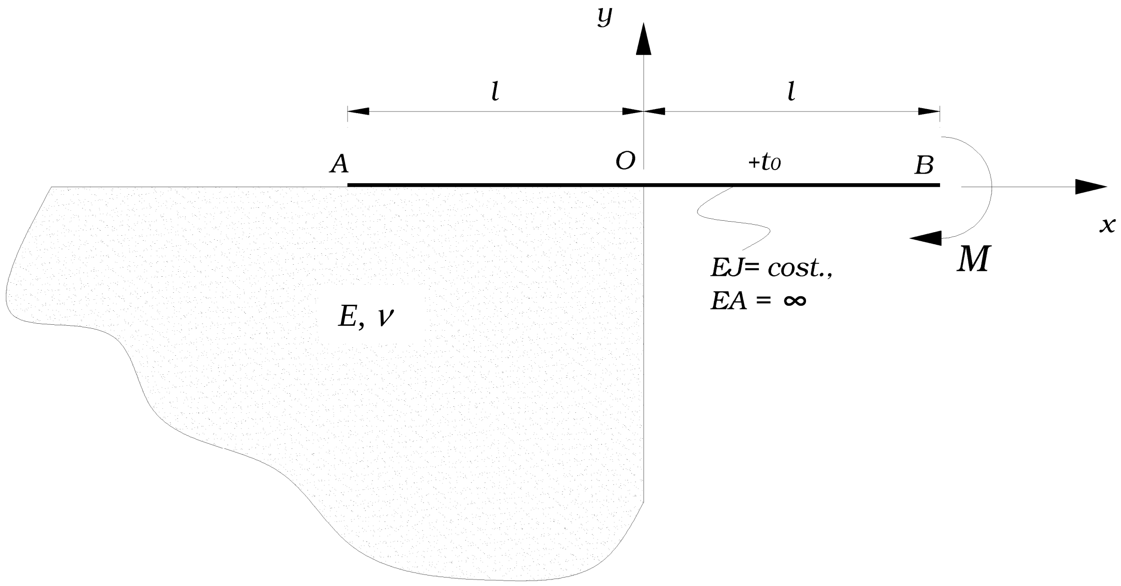


Problema B.2

Una trave flessibile ma inestensibile *AOB* è incollata ad un cuneo elastico, supposto per semplicità, infinitamente esteso, il cui materiale ha costanti elastiche ingegneristiche E e ν. All'estremità della trave agisce una coppia di intensità M.

a) Scrivere sia le equazioni differenziali e le condizioni al bordo che definiscono il problema di equilibrio per i tratti *AO* ($s \in (-l, 0]$) e *CB* ($s \in (0, l]$) della trave, sia le condizioni al bordo che definiscono il problema di equilibrio per il cuneo elastico.

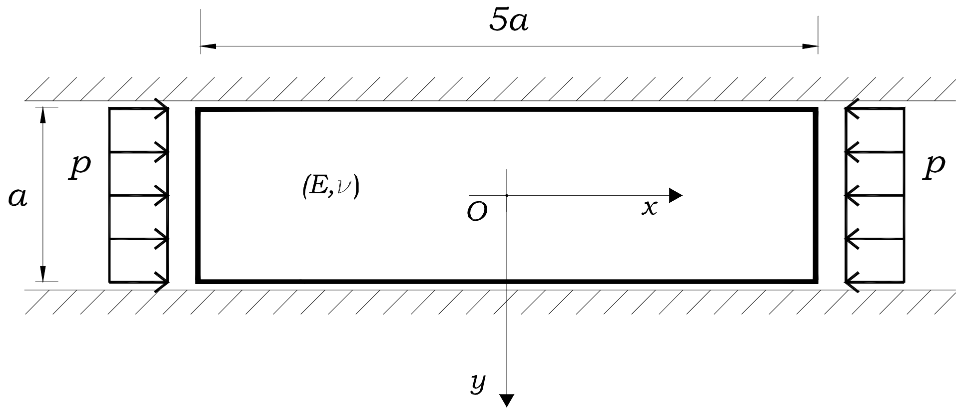
b) Come cambia il problema se la trave *AOB* viene supposta perfettamente rigida?



Problema B.3

Nel problema di elasticità piano nella deformazione di figura, l'elemento *ABCD* è compresso ad opera di un carico uniforme agente su due facce opposte; l'elemento è contenuto fra due pareti verticali, supposte perfettamente lisce e indeformabili.

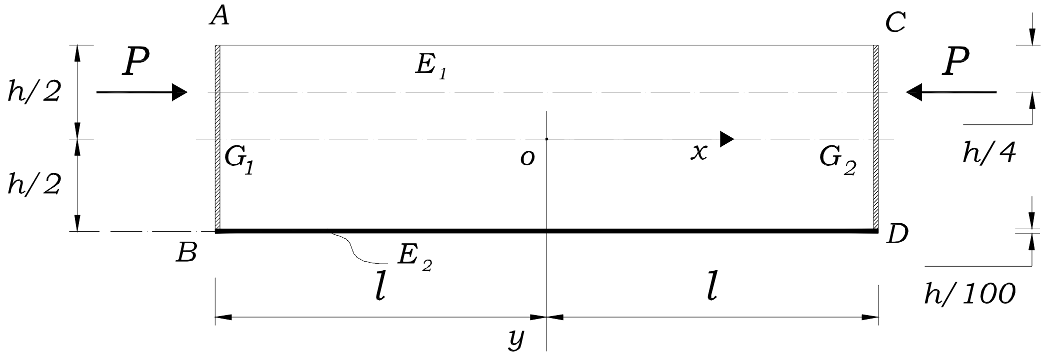
a) Determinare il campo di sforzo effettivo.
b) Decomporre il campo di sforzo precedentemente determinato nella somma della quota idrostatica e di quella distorcente.
c) Se si adotta come criterio di crisi il criterio di Tresca (o della massima tensione tangenziale), con σ_0 tensione di snervamento, qual è il massimo valore della pressione p al quale corrisponde un comportamento elastico?



Problema B.4

Nel problema di elasticità piano nella deformazione di figura, all'intradosso dell'elemento *ABCD* è fissato uno strato sottile di materiale di rinforzo, di modulo elastico $E_2 = 100\ E_1$; inoltre, alle due estremità sono fissate due elementi rigidi ai quali sono applicati i due carichi orizzontali *P*. Una soluzione approssimata del problema di equilibrio può essere ottenuta assumendo che le sezioni trasversali si mantengano piane, che l'unica componente di deformazione significativa sia ε_z e che essa vari linearmente con *y*, ovvero ponendo: $\varepsilon_z = \chi(y - e)$.

a) Determinare i valori della curvatura χ e dell'eccentricità e compatibili con l'equilibrio.
b) Determinare l'energia di deformazione elastica immagazzinata complessivamente nell'elemento elastico.

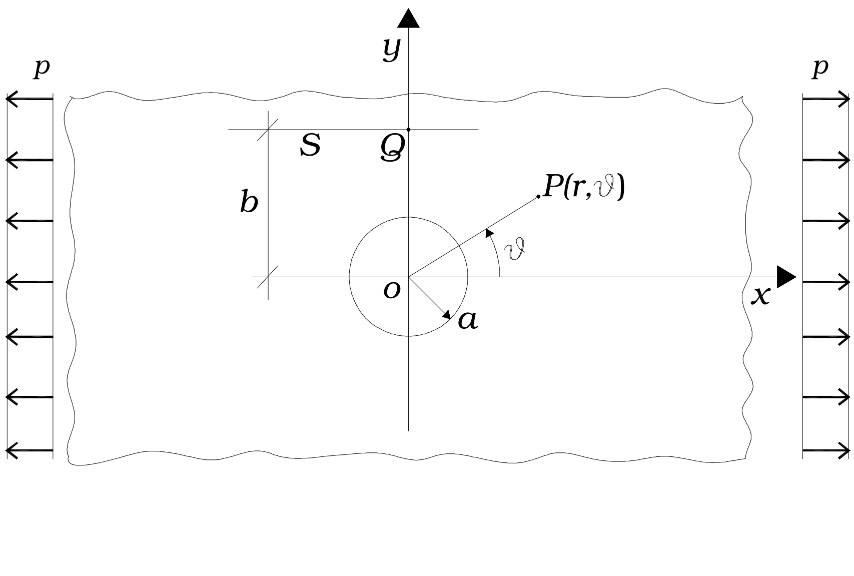


Problema B.5

Nella lastra piana di figura (supporre per semplicità lo spessore unitario), nella quale è praticato un foro di raggio a, è presente, all'infinito, uno stato di tensione fondamentale monoassiale con $\sigma_x = p$. G. Kirsch ha proposto nel 1891 la seguente soluzione in termini di campo di sforzo:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{p}{2}\left(1-\dfrac{a^2}{r^2}\right)+\dfrac{p}{2}\left(1+\dfrac{3a^4}{r^4}-\dfrac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\vartheta \\ \sigma_\vartheta = \dfrac{p}{2}\left(1+\dfrac{a^2}{r^2}\right)-\dfrac{p}{2}\left(1+\dfrac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\vartheta \\ \tau_{r\vartheta} = -\dfrac{p}{2}\left(1-\dfrac{3a^4}{r^4}+\dfrac{2a^2}{r^2}\right)\sin 2\vartheta \end{cases}$$

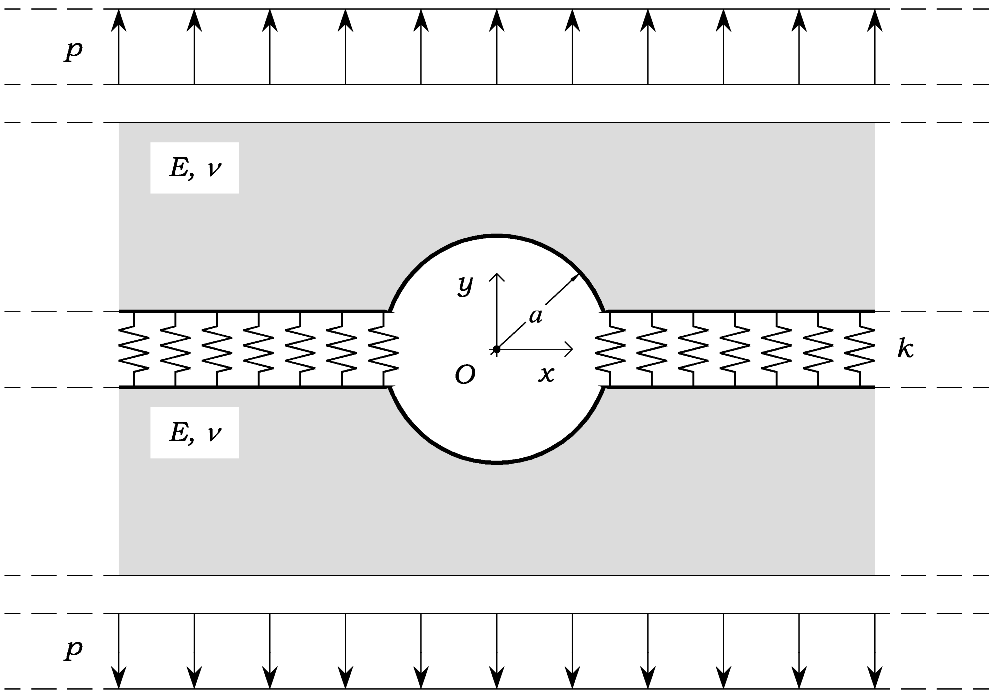
a) Verificare che il campo di sforzo precedente è un campo di sforzo equilibrato.
b) Dire se il campo di sforzo in questione è quello effettivo.
c) Determinare, nei punti della retta $y = x$, i valori delle tensioni σ_x, τ_{xy}, σ_y come funzioni della sola distanza r.
d) Supponendo valido il criterio di crisi di Grashof (o della massima dilatazione principale), con σ_0 tensione di rottura, determinare il valore della tensione p_0 corrispondente alla crisi del materiale.



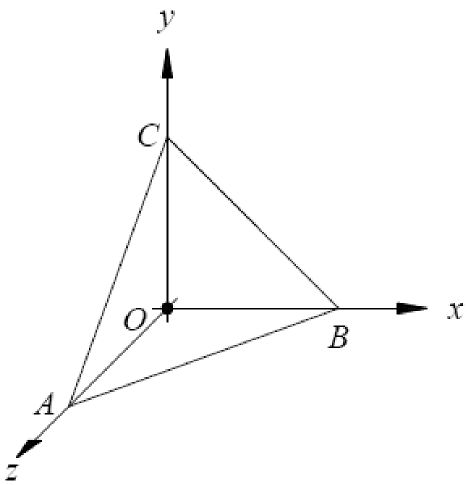
Problema B.6

Nel problema di elasticità piano nella tensione di figura, i due semipiani elastici, soggetti ad una tensione agente all'infinito $\sigma_y = p$, sono uniti da uno strato sottile di colla, il cui comportamento è modellato da un letto di molle, di spessore supposto trascurabile e di costante elastica per unità di lunghezza uguale a k. Inoltre, nella parte centrale, il letto di molle è interrotto da una cavità di forma circolare di raggio a.

a) Scrivere le equazioni differenziali che descrivono il problema di equilibrio elastico per i due semipiani.
b) Scrivere le condizioni al bordo e di estinzione che completano il problema.



Problema B.7

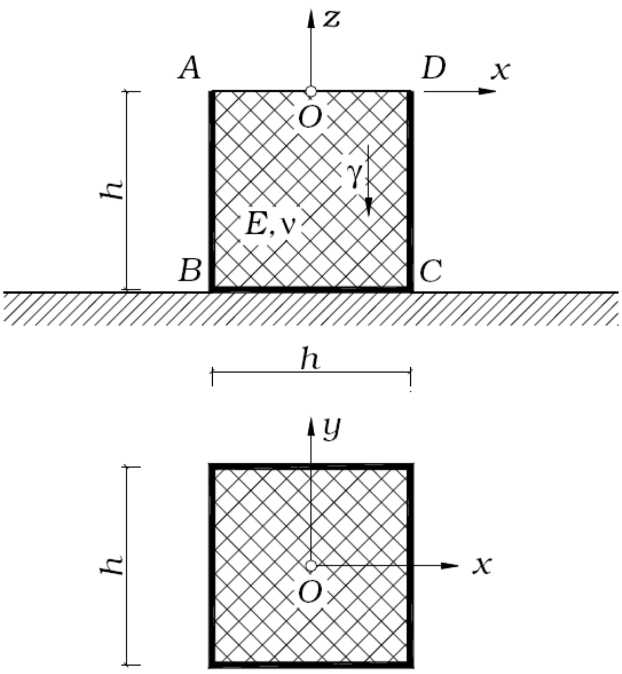


Il tetraedro elastico di vertici (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 1) mostrato in figura, è vincolato in corrispondenza delle facce disposte lungo le giaciture coordinate. Supporre che nel tetraedro sia presente il campo di sforzo seguente:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,$$
$$\tau_{xz} = a(x+y), \quad \tau_{zy} = a(x-y)$$

1) Verificare con quali forze di volume e con quali forze di superficie, attive e reattive è in equilibrio;
2) determinare la risultante e il momento risultante, rispetto ad O, delle forze reattive agenti sulla faccia di normale esterna –*x*.
3) determinare le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali come funzioni del punto considerato;
4) decidere se i vincoli presenti sulle facce vincolate possono essere assimilati o meno ad incastri e se il campo di tensioni assegnato può essere quello effettivo.

Problema B.8

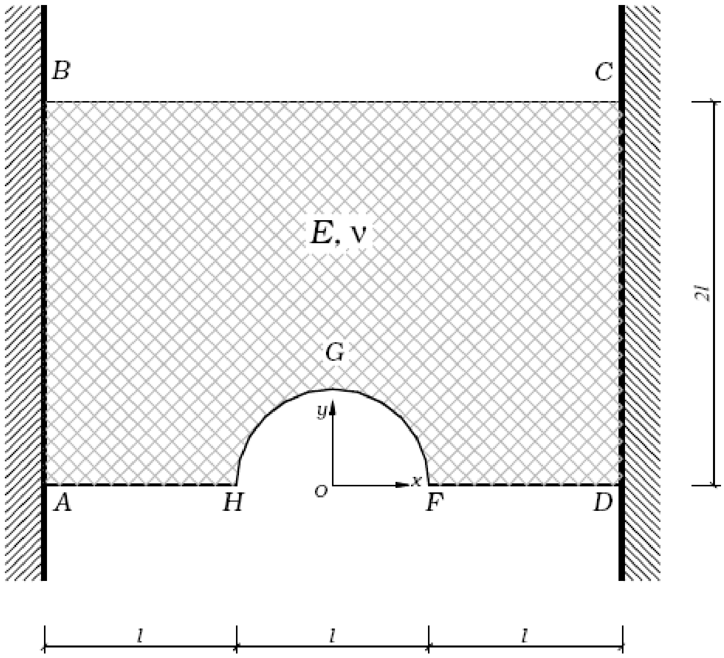


Un materiale granulare, avente peso specifico γ, riempie il contenitore cubico mostrato in figura.
a) Nell'ipotesi che il solido possa essere pensato come un cubo di materiale elastico lineare, omogeneo ed isotropo soggetto al peso proprio, e che le pareti del contenitore siano perfettamente lisce, determinare per quali valori delle costanti a, b, c, d, e, f, g, l, m, n, il campo di sforzo seguente,

$$\sigma_x = ax + by + cz\,, \qquad \sigma_y = dx + ey + fz\,,$$
$$\sigma_z = mx + ny + \gamma z\,,\ \ \sigma_{xy} = g\,,\ \ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = l\,,$$

è staticamente ammissibile.
b) I campi di sforzo staticamente ammissibili determinati in precedenza continuano ad essere tali (ovvero staticamente ammissibili) anche nel caso in cui il contenitore sia cilindrico?
c) Nel caso in cui le pareti del contenitore si possano ritenere perfettamente rigide, individuare tra i campi di sforzo staticamente ammissibili, se è possibile in modo relativamente semplice, quello effettivo.
d) Facendo riferimento al caso precedente, calcolare l'accorciamento della diagonale AC mostrata in figura.
e) Determinare, se possibile, le espressioni esplicite delle componenti del campo di spostamento

Problema B.9



Nel problema piano nella deformazione mostrato in figura sono assegnate le componenti di tensione:

$$\sigma_{xx} = \nu\gamma x(y-2l)\,,\ \ \sigma_{yy} = -\gamma x(y-2l)\ \text{ e }\ \tau_{xy} = 0\,,$$

dove γ è una costante.

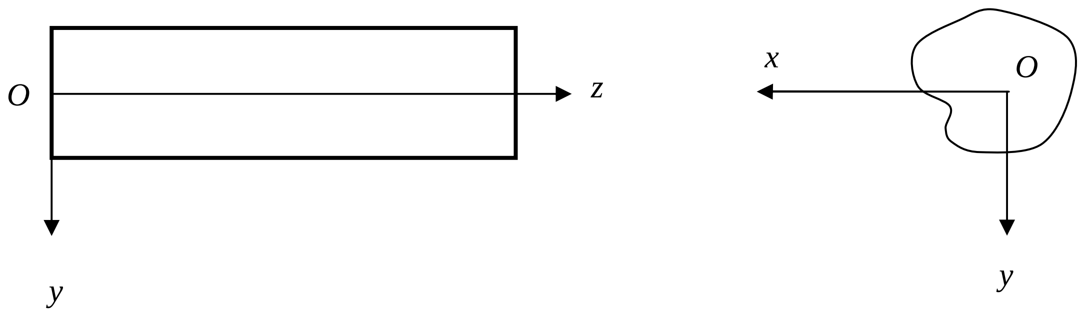
a. Calcolare il valore della componente di tensione σ_{zz}.

b. Determinare le forze di volume e di superficie in equilibrio con il campo di sforzi assegnato.

c. Calcolare il valore della risultante delle forze di superficie agenti sui tratti AB, AH e HGF del bordo (fare riferimento ad uno spessore unitario dell'elemento).

d. Dire se il campo di sforzo è, o meno, quello effettivo.

Problema B.10

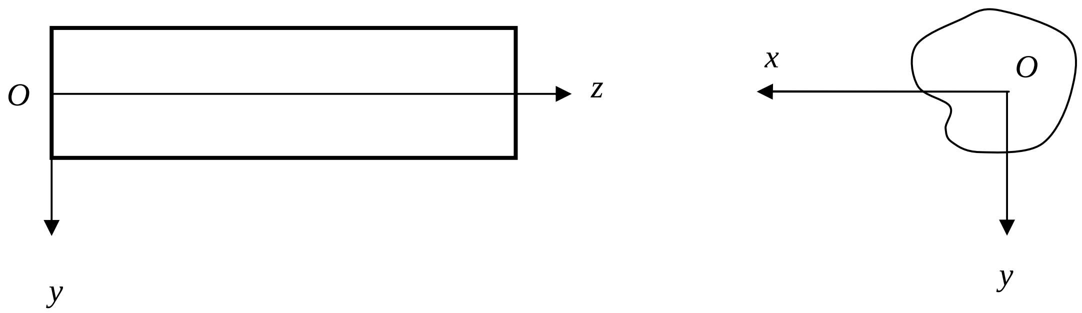


Nei punti del cilindro mostrato in figura (l'origine del sistema di riferimento coincide con il baricentro della sezione di base) è definito il campo di spostamenti:

$$u = -\theta yz, \quad v = \theta xz, \quad w = \theta\psi(x, y),$$

dove θ è una costante e ψ è una funzione arbitraria di x e y.
Nell'ipotesi che il cilindro sia formato da un materiale elastico lineare, omogeneo e isotropo, che le forze di volume siano identicamente nulle e che le forze di superficie siano nulle lungo la superficie laterale e staticamente equivalenti ad una coppia torcente su ciascuna base, determinare quali condizioni devono essere verificate dalla funzione ψ affinché il campo di spostamenti assegnato sia soluzione del problema di equilibrio.

Problema B.11



Nei punti del cilindro mostrato in figura (l'origine del sistema di riferimento coincide con il baricentro della sezione di base, gli assi x e y sono orientati lungo le direzioni principali d'inerzia della sezione stessa) è definito il campo di tensioni:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = a + bx + cy,$$

dove a, b e c sono tre costanti da determinare.
Nell'ipotesi che il cilindro sia formato da un materiale elastico lineare, omogeneo e isotropo, che le forze di volume siano identicamente nulle e che le forze di superficie siano nulle lungo la superficie laterale, determinare per quali valori delle tre costanti il campo di tensioni assegnato è il campo di tensioni effettivo, soluzione del problema di equilibrio nei casi in cui le forze di superficie agenti su ciascuna base sono staticamente equivalenti:

1. ad una coppia flettente d'intensità M, il cui vettore rappresentativo è diretto lungo l'asse x;
2. ad una coppia flettente d'intensità M, il cui vettore rappresentativo è contenuto nel piano x, y;
3. ad una forza N diretta parallelamente all'asse del cilindro, la cui retta d'azione interseca una generica sezione trasversale del cilindro nel punto di coordinate (e_x, e_y).

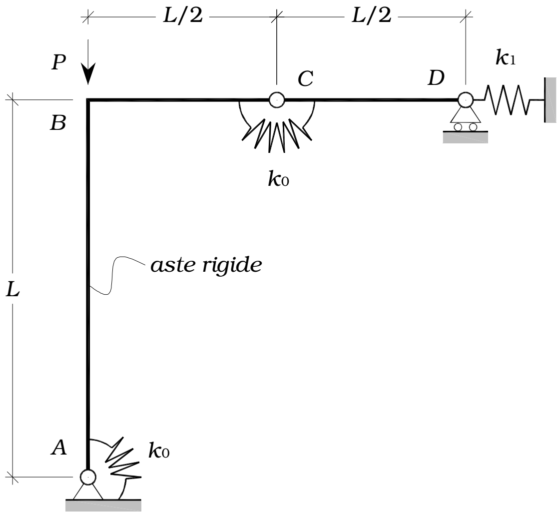
Problema C.1

Il sistema *ABCD* di figura è costituito da aste rigide collegate mediante molle rotazionali ed estensionali di costanti, rispettivamente, k_0 e k_1. Sulla sezione *B* agisce un carico *P*, costante in direzione ma variabile in intensità.

a) Utilizzando il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, scrivere le equazioni d'equilibrio nella configurazione variata.

b) Determinare il valore del carico critico P_c, ovvero il minimo valore di *P* per il quale l'equilibrio nella configurazione banale cessa di essere stabile.

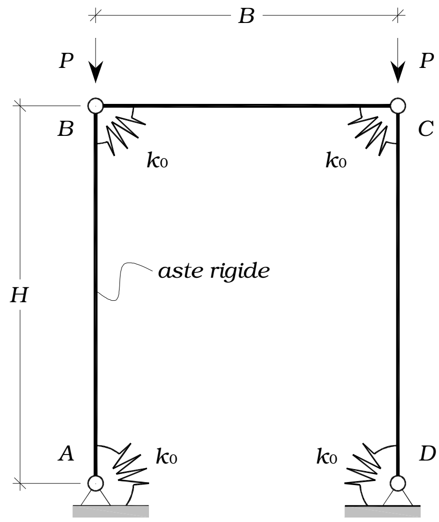
c) Disegnare il percorso di equilibrio nel piano P-u_B, essendo u_B lo spostamento della sezione *B* in direzione ortogonale a quella di applicazione del carico.



Problema C.2

Il sistema *ABCD* di figura è costituito da aste rigide collegate mediante molle rotazionali di costante k_0. Sulle sezioni *B* e *C* agiscono due carichi identici *P*, costanti in direzione ma variabili in intensità.

a) Utilizzando il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, scrivere le equazioni d'equilibrio nella configurazione variata.
b) Determinare il valore del carico critico P_c, ovvero il minimo valore di *P* per il quale l'equilibrio nella configurazione banale cessa di essere stabile.
c) Disegnare il percorso di equilibrio nel piano P-u_B, essendo u_B lo spostamento della sezione *B* in direzione ortogonale a quella di applicazione del carico.



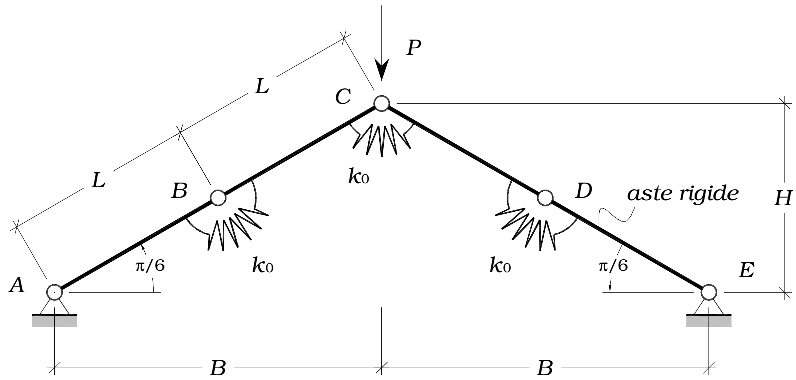
Problema C.3

Il sistema *ABCDE* di figura è costituito da aste rigide collegate mediante molle rotazionali di costante k_0. Sulla cerniera *C* agisce un carico *P*, costante in direzione ma variabile in intensità.

a) Utilizzando il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, scrivere le equazioni d'equilibrio nella configurazione variata.

b) Determinare il valore del carico critico P_c, ovvero il minimo valore di *P* per il quale l'equilibrio nella configurazione banale cessa di essere stabile.

c) Disegnare il percorso di equilibrio nel piano P-v_C, essendo v_C lo spostamento del punto di applicazione di *P* nella direzione e verso di quest'ultimo.



Problema C.4

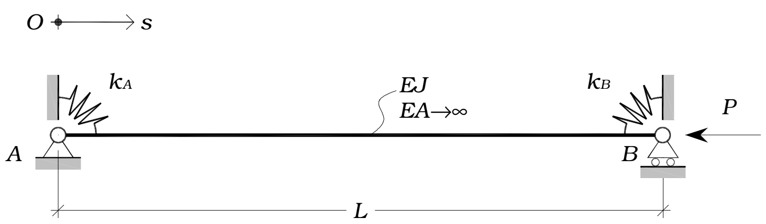
L'asta *AB* di figura, flessibile ma inestensibile, è vincolata agli estremi mediante molle rotazionali di costanti k_A e k_B. Sul carrello *B* agisce un carico *P*, costante in direzione ma variabile in intensità.

a) Scrivere le equazioni differenziali d'equilibrio e le condizioni al contorno che governano il problema.

b) Determinare il valore del carico critico P_c, ovvero il minimo valore di *P* per il quale l'equilibrio nella configurazione banale cessa di essere stabile.

c) Studiare i casi limite in cui le costanti delle molle tendono a zero e all'infinito.

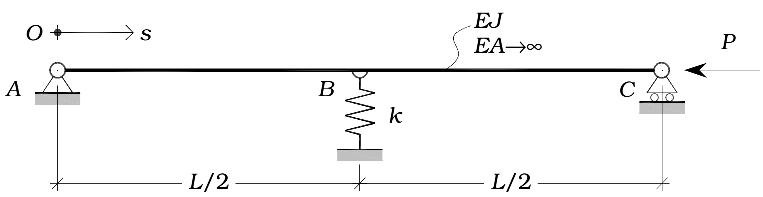
d) Disegnare il percorso di equilibrio nel piano $P\delta$, essendo δ lo spostamento in direzione trasversale della sezione dell'asta di ascissa $s = L/2$.



Problema C.5

L'asta *ABC* di figura, flessibile ma inestensibile, è vincolata agli estremi mediante una cerniera ed un carrello. Inoltre, nella sezione di mezzeria *B* è presente una molla estensionale di costante *k*. Sul carrello *C* agisce un carico *P*, costante in direzione ma variabile in intensità.

a) Scrivere le equazioni differenziali d'equilibrio e le condizioni al contorno che governano il problema.
a) Determinare il valore del carico critico di instabilità P_c.
b) Studiare i casi limite in cui la costante della molla tende a zero e all'infinito.
c) Disegnare il percorso di equilibrio nel piano $P\delta$, essendo δ lo spostamento in direzione trasversale della sezione dell'asta di ascissa $s = L/2$.



Problema C.6

L'asta *AB* di figura, flessibile ma inestensibile, è vincolata agli estremi mediante una cerniera ed un carrello. Essa è soggetta in direzione trasversale ad un carico distribuito variabile con la legge

$$q(s) = q_0 \sin \frac{\pi s}{L}$$

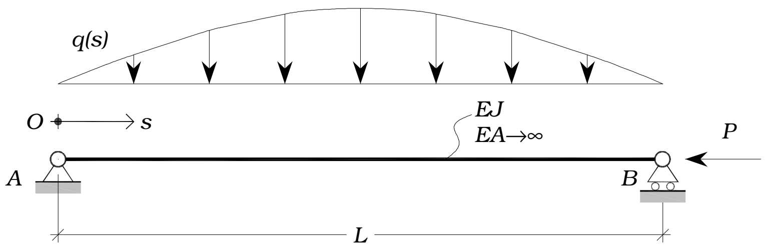
dove $s \in [0, L]$ è l'ascissa misurata a partire dall'estremo *A*. Sul carrello *B* agisce un carico *P*, costante in direzione ma variabile in intensità.

b) Scrivere le equazioni differenziali d'equilibrio e le condizioni al contorno che governano il problema.

c) Determinare il valore del carico critico di instabilità P_c.

d) Studiare il caso limite in cui il carico trasversale q_0 tende a zero.

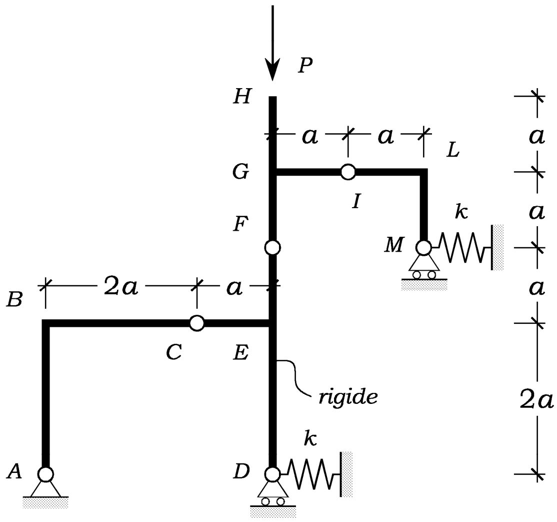
e) Disegnare il percorso di equilibrio nel piano $P\delta$, essendo δ lo spostamento in direzione trasversale della sezione dell'asta di ascissa $s = L/2$.



Problema C.7

Studiare il problema della stabilità dell'equilibrio per il sistema strutturale rappresentato in figura, costituito da aste rigide variamente vincolate tra loro. Nei punti *D* ed *M* sono disposte due molle estensionali di costante elastica *k*. Le aste *DEF* ed *FGH* sono poste in compressione da un carico di intensità *P* applicato in *H*.

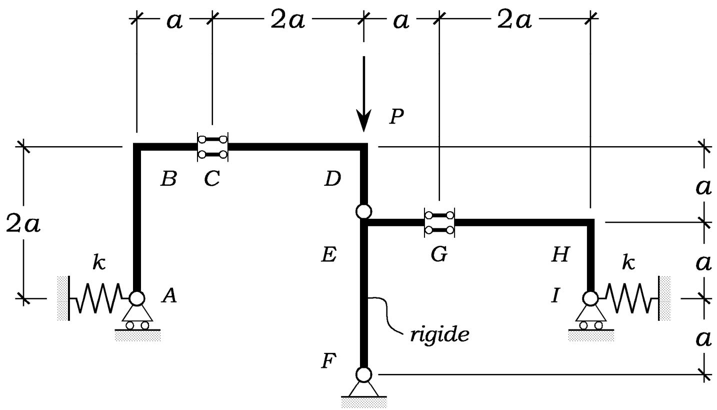
a) Scegliere come coordinate lagrangiane gli angoli, θ_1 e θ_2, corrispondenti rispettivamente alle rotazioni dei corpi *CDEF* e *FGHI*, rispetto alla configurazione di riferimento, e descrivere le possibili configurazioni variate della struttura in funzione di tali parametri.
b) Scrivere le equazioni d'equilibrio del sistema nella configurazione variata (direttamente oppure utilizzando il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale).
c) Nell'ipotesi di rotazioni "piccole", determinare la forma linearizzata delle equazioni di equilibrio.
d) Risolverle le equazioni d'equilibrio linearizzate e determinare i valori critici del carico *P*.
e) Disegnare il percorso di equilibrio del sistema.



Problema C.8

Studiare il problema della stabilità dell'equilibrio per il sistema strutturale rappresentato in figura, costituito da aste rigide variamente vincolate tra loro. Nei punti *A* ed *I* sono disposte due molle estensionali di costante elastica *k*. Le aste *DE* ed *EF* sono poste in compressione da un carico di intensità *P* applicato in *D*.

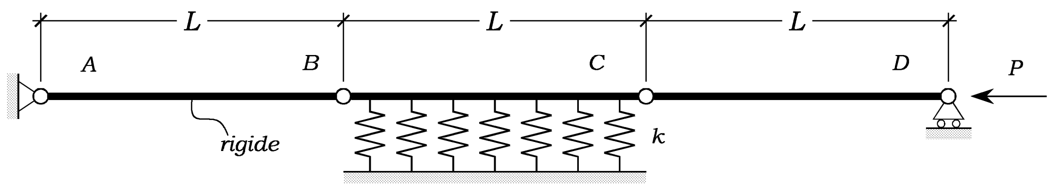
a) Scegliere come coordinate lagrangiane gli angoli, θ_1 e θ_2, corrispondenti rispettivamente alle rotazioni dei corpi *FEG* e *EDC*, rispetto alla configurazione di riferimento, e descrivere le possibili configurazioni variate della struttura in funzione di tali parametri.
b) Scrivere le equazioni d'equilibrio del sistema nella configurazione variata (direttamente oppure utilizzando il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale).
c) Nell'ipotesi di rotazioni "piccole", determinare la forma linearizzata delle equazioni di equilibrio.
d) Risolverle le equazioni d'equilibrio linearizzate e determinare i valori critici del carico *P*.
e) Disegnare il percorso di equilibrio del sistema.



Problema C.9

Studiare il problema della stabilità dell'equilibrio per il sistema strutturale rappresentato in figura, costituito dalle tre aste rigide *AB*, *BC* e *CD*. L'asta *BC* poggia su un letto di molle distribuite di costante *k* (per unità di lunghezza). Le tre aste sono poste in compressione da un carico di intensità *P* applicato sulla cerniera *D*.

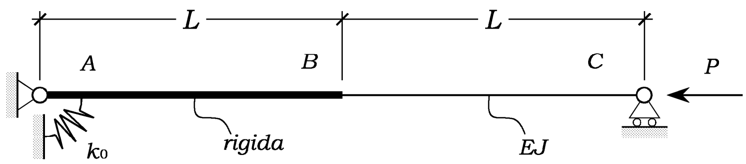
a) Scegliere come coordinate lagrangiane gli angoli, θ_1 e θ_2, corrispondenti rispettivamente alle rotazioni delle aste *AB* e *BC*, rispetto alla configurazione di riferimento, e descrivere le possibili configurazioni variate della struttura in funzione di tali parametri.
b) Scrivere le equazioni d'equilibrio del sistema nella configurazione variata (direttamente oppure utilizzando il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale).
c) Nell'ipotesi di rotazioni "piccole", determinare la forma linearizzata delle equazioni di equilibrio.
d) Risolverle le equazioni d'equilibrio linearizzate e determinare i valori critici del carico *P*.
e) Disegnare il percorso di equilibrio del sistema.



Problema C.10

Studiare il problema della stabilità dell'equilibrio per il sistema strutturale rappresentato in figura, costituito dall'asta rigida *AB* e dalla trave flessibile, ma inestensibile, *BC*. In *A* è collocata una molla rotazionale di costante elastica k_0. Le due aste sono poste in compressione da un carico di intensità *P* applicato sulla cerniera *C*.

a) Scrivere l'equazione differenziale della linea elastica per il tratto *BC* e corredarla delle opportune condizioni al contorno.
b) Scrivere e, se possibile, risolvere l'equazione trascendente che fornisce i valori critici del carico assiale *P*.
c) Disegnare il percorso di equilibrio del sistema.
d) Studiare i casi limite in cui $k_0 \to 0$ e $k_0 \to \infty$.



Problema C.11

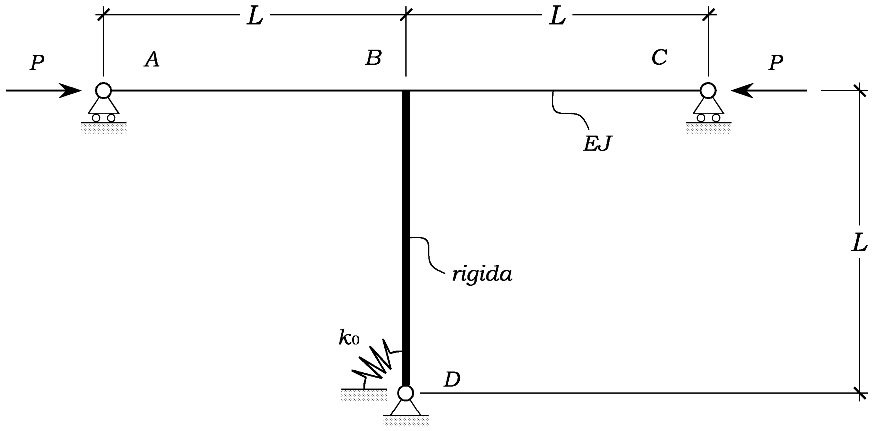
Studiare il problema della stabilità dell'equilibrio per il sistema strutturale rappresentato in figura, costituito dall'asta rigida *BD* e dalle travi flessibili, ma inestensibili, *AB* e *BC*. In *D* è collocata una molla rotazionale di costante elastica k_0. Le due aste flessibili sono poste in compressione da due carichi uguali e opposti, di intensità *P*, applicati sulle cerniere *A* e *C*.

a) Scrivere le equazioni differenziali della linea elastica per i tratti *AB* e *BC* e corredarle delle opportune condizioni al contorno.

b) Scrivere e, se possibile, risolvere l'equazione trascendente che fornisce i valori critici del carico assiale *P*.

c) Disegnare il percorso di equilibrio del sistema.

d) Studiare i casi limite in cui $k_0 \to 0$ e $k_0 \to \infty$.



Problema C.12

Studiare il problema della stabilità dell'equilibrio per il sistema strutturale rappresentato in figura, costituito dagli archi rigidi *AB* e *BC*. Una molla estensionale, di costante elastica *k* e lunghezza a riposo pari a 2*L*, collega i punti *A* e *C*. Sulla cerniera *B* agisce un carico *P*, costante in direzione ma variabile in intensità (e verso).

a) Scegliere come coordinata lagrangiana l'angolo θ_1 che rappresenta la rotazione dell'arco *AB*, rispetto alla configurazione di riferimento, e descrivere le possibili configurazioni variate della struttura in funzione di tale parametro.
b) Scrivere le equazioni d'equilibrio del sistema nella configurazione variata (direttamente oppure utilizzando il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale).
c) Risolverle le equazioni d'equilibrio e determinare i valori critici del carico *P*.
d) Disegnare il percorso di equilibrio del sistema.