CAPITOLO I

SISTEMI LINEARI

1.1. Richiami

Si consideri la matrice quadrata

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}} .$$

Def. Si chiama determinante della matrice A, e si indica con detA o $|A|$, il numero

$$\Sigma (-1)^h \, a_{1\sigma(1)} \, a_{2,\sigma(2)} \dots\dots a_{n\sigma(n)} ,$$

dove σ è una permutazione di $I_n = \{1, 2, \dots\dots, n\}$, h è il numero delle inversioni in σ e la sommatoria è estesa a tutte le possibili permutazioni di I_n.

Regola pratica di Sarrus. Se $n = 3$, detA si può determinare nel seguente modo: scritte alla destra di A le prime due colonne, si moltiplicano gli elementi della diagonale principale, quelli delle due parallele, quelli della diagonale secondaria, quelli delle due parallele e si esegue la somma dei sei termini trovati cambiando segno agli ultimi tre.

Def. Si chiama aggiunto dell'elemento a_{rs}, e si indica con A_{rs}, il numero

$$(-1)^{r+s} M_{rs} ,$$

dove M_{rs} è il determinante della matrice che si ottiene sopprimendo in A la r^{ma} riga e la s^{ma} colonna.

I° teorema di Laplace. Il determinante di una matrice si ottiene sommando i prodotti degli elementi di una linea per i rispettivi aggiunti.

Si consideri la matrice

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m}} ,$$

Def. Si chiama minore di A di ordine r il determinante di una matrice di ordine r ottenuto sopprimendo in A $n-r$ righe e $m-r$ colonne.

Def. Si chiama caratteristica di A il numero che indica l'ordine massimo dei minori non tutti nulli.

Teorema di Kronecker. Individuato in A un minore $M \neq 0$ di ordine r, la caratteristica di A è r se sono nulli tutti i minori di ordine $r+1$ che contengono M.

Si consideri il sistema

$$AX = B$$

con

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m}} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} .$$

Regola pratica di Kramer. Se $n = m$ e $\det A \neq 0$, il sistema è determinato e la sua soluzione è la n^{pla}

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} , \dots\dots , x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} \dots & a_{1n-1} & b_1 \\ & & \\ & & \cdot \\ a_{1n} \dots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}}{\det A} .$$

Teorema di Rouche-Capelli. Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema $AX = B$ sia possibile è che la caratteristica r_i della matrice A sia uguale alla caratteristica r_c della matrice ottenuta aggiungendo alla matrice A la colonna B.

Metodo di Gauss. Il sistema $AX = B$, mediante opportune combinazioni lineari delle sue equazioni, è ricondotto ad un sistema equivalente $A'X = B$ con

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2m} \\ 0 & 0 & & a'_{nm} \end{pmatrix} .$$

A.7 - Stazionarietà di una funzione di n variabili

I problemi discussi nei paragrafi precedenti si semplificano nel caso che si cerchi la stazionarietà di una funzione di n variabili

$$F = F(x_i), \quad (i = 1, ..., n) \tag{A.7.1}$$

Definita la *variazione prima* di F nella forma

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i \tag{A.7.2}$$

diremo in analogia con la (A.4.2) che la funzione F è *stazionaria* in un punto P se risulta

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \tag{A.7.3}$$

Stante l'arbitrarietà delle δx_i, dalla (A.7.3) segue che

condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione F di n variabili abbia un valore stazionario in un punto P, è che le n derivate parziali di F rispetto a tutte le n variabili siano nulle nel punto P, ossia

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \,, \qquad (i = 1, ..., n) \qquad \text{(A.7.4)}$$

Se le variabili della funzione $F(x_i)$ di cui si vuol cercare la stazionarietà non sono libere, ma soggette a soddisfare le m equazioni

$$f_j(x_i) = 0, \qquad (i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., m) \qquad \text{(A.7.5)}$$

con $m < n$, allora si possono eliminare dalle (A.7.5) m delle x_i, ad esempio le ultime, esprimendole in funzione delle rimanenti n-m e sostituendole nella (A.7.1) che diventa una funzione di n-m variabili libere. Pertanto per la stazionarietà scriveremo ancora le (A.7.4) ove i varia da 1 a n-m. E' tuttavia possibile procedere in modo del tutto differente mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Scritte le variazioni delle (A.7.5)

$$\delta f_j = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \, \delta x_i = 0 \qquad \text{(A.7.6)}$$

la condizione di stazionarietà (A.7.3) continua ad essere verificata se ad essa aggiungiamo le m equazioni (A.7.6) moltiplicate per m fattori indeterminati λ_j funzioni delle variabili x_i

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) \delta x_i = 0 \qquad \text{(A.7.7)}$$

Facendo uso delle (A.7.6) possiamo ora eliminare m delle δx_i, ad esempio le ultime. Si può pervenire allo stesso risultato scegliendo i λ_j in modo che risulti

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \,, \qquad (i = n - m + 1, ..., n; \quad j = 1, ..., m) \quad \text{(A.7.8)}$$

Le rimanenti variazioni δx_i risultano indipendenti e ciò, tenendo conto delle (A.7.8), conduce alla conclusione che le (A.7.7) risultano soddisfatte se risulta

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \,, \qquad (i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., m) \qquad \text{(A.7.9)}$$

Dalle (A.7.9) emerge che i coefficienti di *ciascun* δx_i si annullano *come se* tutte le variabili x_i fossero variabili libere. Le (A.7.9), insieme alle (A.7.5), costituiscono un sistema di n + m equazioni nelle n + m incognite x_i, λ_j e pertanto il problema di stazionarietà vincolato è risolto.

Il procedimento fin qui svolto può essere visto in termini più generali. Incalcoliamo la stazionarietà della F^* rispetto a x_i e λ_j considerate *tutte* come variabili libere. Si ha

$$\delta F^* = \delta F + \lambda_j\, \delta f_j + f_j\, \delta\lambda_j = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i + f_j\, \delta\lambda_j = 0 \quad \forall \delta x_i, \delta\lambda_j \tag{A.7.11}$$

da cui discendono le n equazioni (A.7.9) e le m equazioni (A.7.5).

CAPITOLO II

DERIVATE E DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

2.1 - Richiami sulle derivate parziali

Sia $u = f(x, y)$ una funzione definita in un insieme aperto A di R^2.

Fissato un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di A, esiste un intorno I di P_0, ad esempio rettangolare di semidimensioni h e k, tutto contenuto in A.

Pertanto la funzione $f(x, y_0)$ della sola x è definita almeno nell'intervallo aperto $]x_0 - h, x_0 + h[$. Se $f(x, y_0)$ è derivabile per $x = x_0$, la sua derivata per $x=x_0$ si dice *derivata parziale (prima) di* $f(x, y)$ *rispetto a* x *nel punto* P_0 e $f(x, y)$ *si dice parzialmente derivabile rispetto a* x *nel punto* P_0.

La derivata parziale di $f(x, y)$ rispetto a x nel punto P_0 sarà indicata con uno dei simboli

$$f_x(x_0, y_0) \quad , \quad (D_x f)_{(x_0, y_0)} \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}$$

o, talvolta, con $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$.

Quindi

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

o, designando con Δx un incremento della variabile x tale che $(x_0 + x, y_0) \in A$,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad ,$$

supposto che il limite a secondo membro esista finito.

Se $f(x,y)$ é derivabile parzialmente rispetto a x in ogni punto

$P \equiv (x,y) \in A$, la sua derivata rispetto a x é una funzione di x, y definita in A detta *derivata parziale (prima) di* f(x,y) *rispetto a* x *in* A ed indicata, oltre che con i simboli

$$f_x(x, y) \quad , \quad f_x \quad , \quad D_x f \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

anche con gli altri

$$u_x \quad , \quad D_x u \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad .$$

Si dirà allora che f (x, y) è *parzialmente derivabile rispetto a* x *in* A.

Analogamente, la funzione $f(x_0, y)$ della sola y è definita almeno nell'intervallo aperto $]\, y_0 - k, y_0 + k[$. Se $f(x_0, y)$ è derivabile per $y = y_0$, la sua derivata per $y = y_0$ si dice *derivata parziale (prima) di* f (x, y) *rispetto a* y *nel punto* P_0 e f (x, y) si dice *parzialmente derivabile rispetto a* y *nel punto* P_0.

La derivata parziale di f (x, y) rispetto a y nel punto P_0 sarà indicata con uno dei simboli

$$f_y(x_0, y_0) \quad , \quad (D_y f)_{(x_0, y_0)} \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}$$

o, talvolta, con $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$.

Quindi

$$f_y(x_0 , y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 , y) - f(x_0 , y_0)}{y - y_0} \quad ,$$

o, designando con y un incremento arbitrario della variabile y tale che $(x_0, y_0 + \Delta y) \in A$,

$$f_y(x_0 , y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 , y_0 + \Delta y) - f(x_0 , y_0)}{\Delta y} \quad ,$$

supposto che il limite a secondo membro esista finito.

Se f(x, y) è derivabile parzialmente rispetto a y in ogni punto $P \equiv (x, y)$ di A, la sua derivata parziale rispetto a y è una funzione di x, y definita in A detta *derivata parziale (prima) di* f (x, y) *rispetto a* y *in* A ed indicata, oltre che con i simboli

$$f_y(x, y) \quad , \quad f_y \quad , \quad D_y f \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad ,$$

anche con gli altri

$$u_y \quad , \quad D_y u \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad .$$

Si dice allora che f (x, y) è *parzialmente derivabile rispetto a* y *in* A.

In pratica, la derivata parziale di f (x, y) rispetto a x [y] si calcola applicando le note regole di derivazione delle funzioni di una variabile e riguardando y [x] come costante.

Si badi però che la derivabilità parziale di f (x, y) rispetto ad una od entrambe le variabili x e y non implica la sua continuità, diversamente da quanto avviene per le funzioni di una variabile.

Se f_x (x, y) è a sua volta derivabile parzialmente rispetto a x [a y], la sua derivata parziale rispetto a x [a y] si dice *derivata parziale seconda di* f (x, y) *rispetto a* x *due volte* [*a* x *e a* y] e sarà indicata con

$$f_{xx}(x, y) \quad , \quad f_{xx} \quad , \quad D_{xx} f \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\left[f_{xy}(x, y) \quad , \quad f_{xy} \quad , \quad D_{xy} f \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] .$$

Analogamente, se f_y è a sua volta derivabile parzialmente rispetto a x [a y] la sua derivata parziale rispetto a x [a y] si dice *derivata parziale seconda rispetto a* y *e a* x [*a* y *due volte*] e sarà indicata con

$$f_{yx}(x, y) \quad , \quad f_{yx} \quad , \quad D_{yx} f \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\left[f_{yy}(x, y) \quad , \quad f_{yy} \quad , \quad D_{yy} f \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] .$$

Le derivate f_{xx} e f_{yy} si dicono *derivate parziali seconde pure,* mentre le derivate f_{xy} e f_{yx} si dicono *derivate parziali seconde miste.*

Si dimostra il [v. A.M.II, n. 2.1]

TEOREMA 2.1.1 (di *Schwarz*) - *Se la funzione* f (x, y) *è dotata in* A *di derivate parziali prime e seconde miste, quest'ultime sono uguali in ogni punto* $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ *di* A *in cui sono continue.*

In generale, le derivate parziali prime delle derivate parziali (n - 1)-me di f (x, y) si dicono *derivate parziali* n-me o *di ordine* n.

Se f (x, y) è dotata di derivate parziali fino a quella di ordine n continue, per il teorema di Schwarz si possono invertire le due ultime derivazioni e perciò due qualsiasi derivazioni successive. In tale ipotesi, la derivata parziale n-ma di f (x, y) rispetto a x p volte e rispetto a y q volte, si indica con

$$f_{x^p y^q}(x, y) \quad , \quad f_{x^p y^q} \quad , \quad \frac{\partial^n}{\partial x^p \partial y^q} f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q} \quad , \quad (p + q = n)$$

Se f (x, y) è dotata in A di derivate parziali prime, in ogni punto $P \equiv (x, y)$ di A si può considerare il vettore avente origine in P e componenti cartesiane f_x e f_y. Questo vettore si dice *gradiente della funzione* f (x, y) *nel punto* P e si indica con

$$(\mathrm{grad} f)_P \quad .$$

Spesso si omette il punto P e si scrive semplicemente gradf.

Il quadrato dell'intensità del gradiente di f, cioè la quantità

$$f_x^2 + f_y^2 \quad ,$$

si dice *parametro differenziale primo* o *delta uno di* f e si indica con Δ_1 f.

Se f (x, y) è dotata in A di derivate parziali seconde pure, la somma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

si dice *laplaciano* o *parametro differenziale secondo* o *delta due di f* e si indica con Δ_2 f.

D'altra parte, se $\vec{v}$ è un vettore di componenti cartesiane X e Y, funzioni definite in A e parzialmente derivabili la prima rispetto a x e la seconda rispetto a y, l'espressione

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

si chiama *divergenza del vettore* $\vec{v}$ e si indica con

$$\operatorname{div} \vec{v} \ .$$

Ne segue che

$$\Delta_2 f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f \, .$$

***

Sia ora $u = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ una funzione definita in un insieme aperto A di R^n e sia $P_0 \equiv (x^\circ_1, x^\circ_2, \ldots\ldots, x^\circ_n)$ un punto di A.

Consideriamo la funzione della sola variabile x_i:

$$f(x^\circ_1, x^\circ_2, \ldots\ldots, x^\circ_{i-1}, x_i, x^\circ_{i+1}, \ldots\ldots, x^\circ_n).$$

Se questa è derivabile per $x_i = x_i$, la sua derivata per $x_i = x^\circ_i$ *si dice derivata parziale (prima) di* $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ *rispetto alla variabile* x_i *nel punto* P_0 e sarà indicata con uno dei simboli

$$f_{x_i}(P_0) \quad , \quad (D_{x_i} f)_{P_0} \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P_0} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(x^\circ_1, x^\circ_2 \ldots, x^\circ_n) \quad .$$

In altri termini

$$f_{x_i}(P_0) = \lim_{x_i \to x^\circ_i} \frac{f(x^\circ_1, \ldots, x^\circ_{i-1}, x_i, x^\circ_{i+1}, \ldots, x^\circ_n) - f(x^\circ_1, \ldots, x^\circ_{i-1}, x^\circ_i, x^\circ_{i+1}, \ldots, x^\circ_n)}{x_i - x^\circ_i}$$

o, designando con Δx_i un incremento arbitrario di x_i tale che il punto $(x^\circ_1, \ldots, x^\circ_{i-1}, x^\circ_i + \Delta x_i, x^\circ_{i+1}, \ldots, x^\circ_n) \in A$,

$$f_{x_i}(P_0) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x^\circ_1, \ldots, x^\circ_{i-1}, x^\circ_i + \Delta x_i, x^\circ_{i+1}, \ldots, x^\circ_n) - f(x^\circ_1, \ldots, x^\circ_{i-1}, x^\circ_i, x^\circ_{i+1}, \ldots, x^\circ_n)}{\Delta x_i}$$

supposto che il limite a secondo membro esista finito.

Analogamente al caso delle funzioni di due variabili, si definiscono le derivate parziali di ordine superiore al primo della funzione f $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Il teorema di Schwarz si estende. Pertanto se f $(x_1, x_2, ..., x_n)$ è dotata di derivate parziali continue fino a quelle di ordine k, la derivata parziale prima di $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ rispetto a x_1 k_1 volte, a x_2 k_2 volte, ..., a x_n k_n volte, si può indicare con uno dei simboli

$$f_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ..... x_n^{k_n}} (x_1, x_2, ..., x_n), \qquad f_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ..... x_n^{k_n}} ,$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ..... \partial x_n^{k_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n) ,$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ..... \partial x_n^{k_n}} , \quad (k_1 + k_2 + ... + k_n = k) .$$

Analogamente al caso delle funzioni di due variabili, si definiscono il gradiente, il parametro differenziale primo ed il parametro differenziale secondo della funzione f.

OSSERVAZIONE 2.1.1 - Sin qui abbiamo considerato funzioni definite in un insieme aperto A. Consideriamo ora una funzione f definita in un dominio T e sia P_0 un punto della frontiera ∂T di T. In questo caso, la derivata parziale prima di f rispetto a x_i nel punto P_0 è definita come limite (supposto esistente e finito) di $f_{x_i}(P)$ per P tendente a P_0, essendo P un punto interno a T. □

Analogamente per le derivate parziali di ordine superiore.

3.7 - Richiami sui massimi e minimi per le funzioni di più variabili

Sia $f(P) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una funzione definita in un insieme aperto A di R^n.

Un punto $P_0 \equiv (x^\circ_1, x^\circ_2, \dots, x^\circ_n)$ di A si dice *punto di massimo* [*di minimo*] *relativo* per f(P) in A se esiste un intorno di P_0 tale che per ogni punto $P \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ di A in esso contenuto si abbia

$$f(P) \leq f(P_0) \qquad [f(P) \geq f(P_0)] \tag{3.7.1}$$

Si suole anche dire che f(P) ha in P_0 un *massimo* [*minimo*] *relativo.*
Se nella prima [seconda] della (3.7.1) si ha l'uguaglianza solo quando $P \equiv P_0$, P_0 si dice punto di massimo [di minimo] relativo *forte* o *proprio.*

Sussistono i teoremi seguenti [v. A. M. II, n. 3.5].

TEOREMA 3.7.1 - *Se* f(P) *è una funzione continua con le sue derivate parziali prime e seconde in* A, *condizione necessaria affinché* f(P) *abbia nel punto* P_0 *di* A *un massimo [minimo] relativo e che le derivate parziali prime di* f(P) *in* P_0 *siano tutte nulle e la forma quadratica*

NON È UNA COND SUFFICIENTE

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j f_{x_i} f_{x_j} (P_0)$$

sia semidefinita negativa [positiva].

TEOREMA 3.7.2 - *Se* f(P) *è una funzione continua con le sue derivate parziali prime e seconde in* A, *condizione sufficiente affinché* f(P) *abbia nel punto* P_0 *di* A *un massimo [minimo] relativo proprio é che le derivate parziali prime di* f(P) *in* P_0 *siano tutte nulle e la forma quadratica* $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *sia definita negativa [positiva].*

Le condizioni affinché la forma quadratica $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ sia semidefinita [definita] si ottengono considerando i determinanti

$$M_r(P_0) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(P_0) & f_{x_1x_2}(P_0) & \cdots & f_{x_1x_r}(P_0) \\ f_{x_2x_1}(P_0) & f_{x_2x_2}(P_0) & \cdots & f_{x_2x_r}(P_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_rx_1}(P_0) & f_{x_rx_2}(P_0) & \cdots & f_{x_rx_r}(P_0) \end{vmatrix}, \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Si dimostra che affinché la forma $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ sia semidefinita positiva [negativa] occorre e basta che i determinanti $M_r(P_0)$, $(r=1, 2, \ldots, n)$, siano tutti ≥ 0 [alternativamente ≤ 0 e ≥ 0], laddove sostituendo i segni ≥ 0 e ≤ 0 rispettivamente con > e < si ha la condizione necessaria e sufficiente affinché la forma $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ sia definita positiva [negativa].

Il determinante $H(P_0) = M_n(P_0)$ si chiama l'*hessiano della funzione* f *nel punto* P_0.

In particolare, affinché una funzione f(x,y) continua con le sue derivate parziali prime e seconde in un insieme aperto A del piano xy abbia in un punto (x_0, y_0) di A un massimo [minimo] relativo occorre che

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

e

$$f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0 \qquad [\geq 0] \quad , \quad \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \geq 0$$

laddove affinché f(x,y) abbia in (x_0, y_0) un massimo [minimo] relativo proprio basta che

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

e

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \qquad [> 0] \quad , \quad \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0 \quad .$$

OSSERVAZIONE 3.7.1 - Se f è definita in un insieme I di R^n, le definizioni date continuano a valere ma i teoremi valgono solo per i punti P_0 interni a I. □

OSSERVAZIONE 3.7.2 - I massimi e minimi relativi di f(P) al variare comunque di P in A si dicono *liberi* per distinguerli da quelli *vincolati* che considereremo in seguito. □

***

Sia ora f(P) una funzione continua in un insieme chiuso e limitato T di R^n. In virtù del teorema di Weierstrass, f(P) ha minimo m e massimo M *assoluti* in T, cioé esistono in T almeno due punti $\overline{P}$ e $\overline{\overline{P}}$ tali che, detti m e M l'estremo inferiore e superiore di f(P) in T, si ha

$$f(\overline{P}) = m \qquad , \qquad f(\overline{\overline{P}}) = M \quad .$$

I punti di massimo e di minimo assoluto vanno ricercati fra:

a) i punti interni a T in cui f(P) ha derivate parziali prime tutte nulle;

b) i punti interni a T in cui f(P) non è derivabile parzialmente rispetto a tutte le variabili da cui dipende;

c) i punti della frontiera di T.

Trovati tali punti, si calcolano i valori di f(P) in essi. Se $\overline{P}$ è uno dei punti in cui f(P) assume il valore più piccolo e $\overline{\overline{P}}$ é uno dei punti in cui f(P) assume il valore più grande, si ha

$$f(\overline{P}) = m \qquad e \qquad f(\overline{\overline{P}}) = M \quad .$$

La regola precedente può applicarsi anche quando T non è necessariamente chiuso e limitato e f(P) non é necessariamente continua. In tal caso, poiché il teorema di Weierstrass non è applicabile, calcolati i detti valori di f(P) e trovati tra essi quello più piccolo e quello più grande, occorre poi verificare che questi ultimi siano effettivamente il minimo ed il massimo di f(P) in T.