



XIII CONGRESSO NAZIONALE  
DELL'ASSOCIAZIONE ITALIANA  
DI MECCANICA TEORICA ED APPLICATA

ATTI

MECCANICA DELLE STRUTTURE

Volume IV

SIENA, 29 Settembre – 3 Ottobre 1997

EDIZIONI ETS



## UNA STRATEGIA EFFICIENTE PER TRACCIARE I PERCORSI DI EQUILIBRIO DI TRAVATURE RETICOLARI SPAZIALI

S. LIGARÒ, P. VALVO

*Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Università di Pisa, Italia.*

### SOMMARIO

Si espone un metodo incrementale-iterativo per tracciare i percorsi d'equilibrio di travature reticolari elastiche spaziali, soggette a carichi conservativi. Utilizzando l'ascissa curvilinea come parametro della rappresentazione, ed introducendo due vincoli ulteriori per limitare indipendentemente l'incremento dei carichi ed il modulo del massimo spostamento nodale, risulta possibile assicurare la convergenza del metodo anche in prossimità di eventuali punti di biforcazione, senza ridurre l'efficienza computazionale. L'applicazione dell'algoritmo a casi riportati in letteratura, oltre a riprodurre i risultati noti, ha permesso di tracciare alcuni rami secondari precedentemente incogniti.

### ABSTRACT

This paper describes an incremental-iterative procedure for tracing the equilibrium paths of elastic reticulated space trusses, subjected to conservative loads. Independent constraints to control the load increment and the maximum nodal displacement, far from reducing the computational efficiency, have proved to be very effective in preventing bad convergence in the neighbourhood of bifurcation points. For some simple planar and space trusses, the obtained numerical results matched the known solutions. In addition, the method was able to trace some previously unknown secondary branches.

### 1. INTRODUZIONE

Le strutture reticolari spaziali, quali, ad esempio, tralicci e cupole, sono molto sensibili alle imperfezioni geometriche. Esse possono subire grandi cambiamenti di forma, prim'ancora che le singole membrature s'instabilizzino e sotto valori modesti dello sforzo. La determinazione del carico critico euleriano è dunque insufficiente per la loro progettazione.

Le configurazioni di equilibrio da esse assunte sotto i carichi assegnati, si ottengono risolvendo un sistema di equazioni non-lineari, le cui soluzioni possono essere messe in

corrispondenza coi punti di una ipersuperficie nello spazio a  $2n$  dimensioni, formato dalle componenti delle forze esterne  $s_1, s_2, \dots, s_n$  e degli spostamenti nodali  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , detta superficie d'equilibrio [1]. Nel caso di carichi variabili proporzionalmente ad un unico parametro  $\lambda$ , le soluzioni giacciono sui punti di una o più curve, generalmente regolari, che costituiscono il percorso d'equilibrio. La curva per l'origine è detta ramo primario, le eventuali altre curve sono dette rami secondari.

Poiché i fenomeni d'instabilità sono intimamente connessi con le proprietà geometriche del percorso, ad esempio i fenomeni di *snapping* e *buckling* corrispondono rispettivamente a punti limite e punti di biforcazione, il tracciamento completo del percorso è una condizione indispensabile per lo studio di queste strutture. Tuttavia, eccettuati alcuni casi elementari, tanto semplici quanto rari, la soluzione del sistema non-lineare impone il ricorso a metodi numerici. A tal fine, due principali strategie sono attualmente disponibili: i metodi asintotico-numerici e i metodi incrementali-iterativi. I primi si basano su tecniche di perturbazione statica e forniscono la soluzione come sviluppo in serie di potenze di un parametro prescelto. I secondi, invece, sono basati sul concetto di matrice di rigidità tangente ed utilizzano una procedura iterativa che traccia il percorso punto per punto, in corrispondenza a successivi valori del parametro.

In entrambi i casi, la scelta del parametro della rappresentazione  $\eta$  è un punto cruciale; infatti, se  $\eta$  coincide con  $\lambda$  o con una qualsiasi delle  $q_1, q_2, \dots, q_n$  l'algoritmo va sicuramente in crisi in corrispondenza dei punti limite. Ciò può essere senz'altro evitato utilizzando come parametro l'ascissa curvilinea  $s$  od una sua approssimazione [2]. Altre difficoltà s'incontrano, inoltre, in prossimità dei punti di biforcazione dell'equilibrio, dove salti non desiderati dell'algoritmo su rami secondari, risultano sempre possibili.

In questo lavoro si fa vedere come l'introduzione di due vincoli ulteriori indipendenti, per limitare l'incremento dei carichi ed il modulo del massimo spostamento nodale, riesce ad assicurare la convergenza del metodo anche in prossimità dei punti di biforcazione, senza ridurre l'efficienza computazionale. L'algoritmo, nei casi in cui è stato applicato, ha riprodotto i risultati noti ed ha permesso nello stesso tempo il tracciamento di alcuni rami secondari nuovi.

## 2. LA RICERCA DELLE CONFIGURAZIONI D'EQUILIBRIO

Le  $M$  aste della struttura reticolare sono collegate agli  $N$  nodi con delle cerniere perfette; esse sono rettilinee e costituite da materiale elastico indefinitamente lineare. Si assume, inoltre, che i carichi varino proporzionalmente ad un unico parametro  $\lambda$ .

Nel sistema di riferimento  $O, x, y, z$ , la posizione dell' $R$ -mo nodo è individuata dal vettore  $\mathbf{X}_R = [x_R, y_R, z_R]^T$ , il suo spostamento rispetto alla posizione iniziale  $\mathbf{X}_R^{(0)} = [x_R^{(0)}, y_R^{(0)}, z_R^{(0)}]^T$  dal vettore  $\mathbf{q}_R = \mathbf{X}_R - \mathbf{X}_R^{(0)} = [u_R, v_R, w_R]^T$ , mentre la forza su di esso agente è indicata con  $\mathbf{Q}_R = [(Q_R)_x, (Q_R)_y, (Q_R)_z]^T = \mathbf{r}_R + \mathbf{s}_R$ , somma della reazione elastica interna  $\mathbf{r}_R$  e del carico applicato esterno  $\mathbf{s}_R$ .

Il sistema delle forze interne costituisce un insieme conservativo, la cui energia potenziale coincide con l'energia di deformazione elastica della struttura  $W=W(\mathbf{q})$ . Le

forze esterne costituiscono anch'esse un insieme conservativo, la cui energia potenziale è indicata con  $V=V(\mathbf{s}; \mathbf{q})=V(\lambda; \mathbf{q})$ . L'energia potenziale totale del sistema, risulta allora

$$\Pi(\lambda; \mathbf{q}) = W(\mathbf{q}) + V(\lambda; \mathbf{q}) = \sum_{\substack{\text{tutte} \\ \text{le aste}}} \frac{1}{2} E_{RS} A_{RS} L_{RS}^{(0)} \varepsilon_{RS}^2 - \lambda \mathbf{p}^T \mathbf{q}, \quad (1)$$

dove  $E_{RS}$  è il modulo di Young dell'asta che collega i nodi  $R$  ed  $S$ ,  $A_{RS}$  l'area della sua sezione trasversale, ritenuta costante,  $L_{RS}^{(0)}$  la lunghezza iniziale, ed

$$\varepsilon_{RS} = \frac{(L_{RS})^2 - (L_{RS}^{(0)})^2}{2(L_{RS}^{(0)})^2} = \frac{(\mathbf{q}_S - \mathbf{q}_R)^T (2\mathbf{X}_S^{(0)} - 2\mathbf{X}_R^{(0)} + \mathbf{q}_S - \mathbf{q}_R)}{2(L_{RS}^{(0)})^2}. \quad (2)$$

la dilatazione assiale.

L'equilibrio della struttura si ottiene scrivendo le condizioni necessarie per la stazionarietà di  $\Pi(\lambda; \mathbf{q})$  rispetto a  $\mathbf{q}$ . In particolare, per il nodo  $R$ -mo, si ottengono le tre equazioni:

$$\mathbf{f}_R(\lambda; \mathbf{q}) = \sum_{M_R} \frac{-E_{RS} A_{RS}}{2(L_{RS}^{(0)})^3} [(\mathbf{q}_S - \mathbf{q}_R)^T (\mathbf{q}_S - \mathbf{q}_R + 2\mathbf{X}_S^{(0)} - 2\mathbf{X}_R^{(0)})] \cdot (\mathbf{q}_S - \mathbf{q}_R + \mathbf{X}_S^{(0)} - \mathbf{X}_R^{(0)}) - \lambda \mathbf{p}_R = \mathbf{r}_R + \mathbf{s}_R = \mathbf{0}, \quad (3)$$

dove la sommatoria è estesa alle  $M_R$  aste che convergono in esso.

### 3. IL PERCORSO DI EQUILIBRIO

La ricerca delle successive configurazioni di equilibrio assunte dalla struttura al variare di  $\lambda$ , viene effettuata risolvendo le equazioni (3) per via numerica. L'algoritmo che qui si utilizza appartiene alla classe dei metodi incrementali-iterativi, e traccia l'intero percorso d'equilibrio deducendo, tratto per tratto, la nuova soluzione a partire da quella precedentemente ottenuta. L'origine ( $\lambda=0$ ;  $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ ) costituisce il punto di partenza. All'interno di ogni passo, il metodo iterativo usato è quello di Newton-Raphson.

Il parametro della rappresentazione  $\eta$ , anziché l'ascissa curvilinea, è costituito dalla sua proiezione sulla tangente locale al percorso. La sua definizione è data in forma implicita dall'equazione:

$$f_0(\lambda^{(K+1)}; \mathbf{q}^{(K+1)}; \eta) = \dot{\lambda}^{(K)} [\lambda^{(K+1)} - \lambda^{(K)}] + \dot{q}_i^{(K)} [q_i^{(K+1)} - q_i^{(K)}] - \eta = 0 \quad (4)$$

che va associata alle  $3N$  equazioni d'equilibrio (3). Nella (4), il punto indica derivazione rispetto all'ascissa curvilinea  $s$ , mentre gli apici  $(K)$  e  $(K+1)$  denotano due passi incrementali consecutivi.

Uno dei maggiori difetti derivanti dall'adozione usuale di un valore costante per l'incremento  $\eta \approx \Delta s$ , è rappresentato dal fatto che se esso è troppo piccolo, l'intero

percorso risulta frazionato inutilmente in tantissimi passi anche dove non serve; viceversa, se è grande, l'algoritmo va facilmente in crisi nei tratti a forte curvatura. Per tale motivo, in questo lavoro, l'incremento dell'ascissa curvilinea, è stato fatto variare proporzionalmente al modulo del raggio di curvatura principale noto. Tale semplice strategia ha permesso di adattare il procedimento risolutivo alla complessità della curva, riducendo il numero delle iterazioni necessarie in ciascun passo e migliorando in modo sensibile l'accuratezza del tracciamento. Essa, tuttavia, non è in grado di impedire che fra due passi consecutivi la singola coordinata lagrangiana ( $\lambda$  o qualcuna delle  $q_1, q_2, \dots, q_n$ ) possa subire incrementi improvvisi, come spesso si verifica. Ciò ha suggerito l'opportunità di introdurre due ulteriori controlli indipendenti sull'incremento dei carichi e sul modulo del massimo spostamento nodale, vincoli che costituiscono delle guide mobili lungo tutto il percorso. In particolare, se  $\mathbf{q}_R^{(K)}$  e  $\mathbf{q}_R^{(K+1)}$  sono i vettori spostamento del nodo  $R$ -mo in due passi consecutivi, s'impongono i seguenti vincoli:

$$g_R = \|\mathbf{q}_R^{(K+1)} - \mathbf{q}_R^{(K)}\|^2 - d_R^2 = \|\Delta \mathbf{q}_R^{(K)}\|^2 - d_R^2 \leq 0, \quad R = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

dove i valori  $d_R$  sono delle costanti assegnate.

La ricerca delle configurazioni di equilibrio al variare di  $\lambda$ , viene ricondotta, tratto per tratto, a quella dei punti di stazionarietà di (1), sotto i vincoli (4) e (5). Tale problema è stato risolto col metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

#### 4. APPLICAZIONI

Per la struttura reticolare mostrata in Figura 1a (struttura di Von Mises), la soluzione in forma chiusa delle (3), è data, per il ramo primario, dalla seguente espressione:

$$\begin{cases} u = 0 \\ \lambda = \frac{1}{p_z} \frac{EA}{(L^{(0)})^3} w(w-h)(w-2h). \end{cases} \quad (6)$$

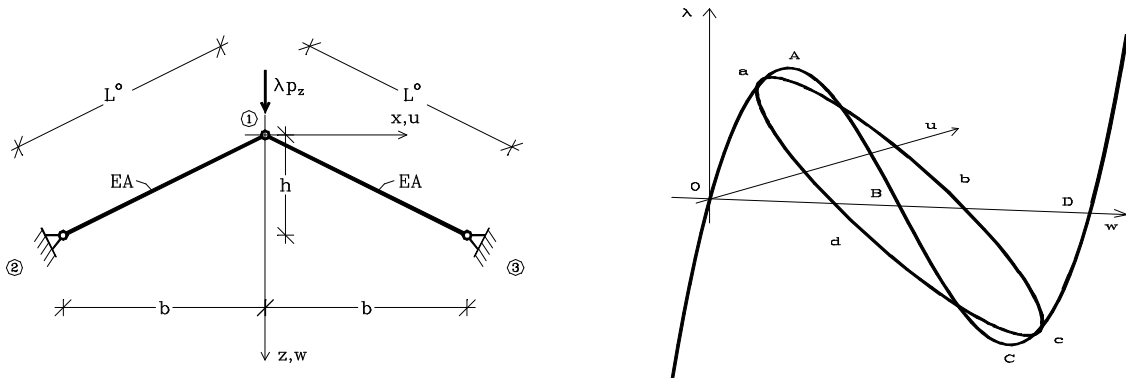


Figura 1: a) Travatura di Von Mises - b) Ramo primario e ramo secondario

Per  $h > \sqrt{2b}$ , esistono soluzioni reali,  $u \neq 0$ , fornite dai punti dell'ellisse (Figura 1b)

$$\begin{cases} u^2 + (w-h)^2 = h^2 - 2b^2 \\ \lambda = -\frac{2}{p_z} \frac{EA}{(L^{(0)})^3} b^2 (w-h) \end{cases} \quad (7)$$

che costituisce il ramo secondario. Esso interseca quello primario nei punti a e c.

Per la travatura della Figura 2a, la soluzione in forma chiusa delle (3), risulta

$$\begin{cases} w = h \mp \sqrt{\frac{u^3 - 3u_0 u^2 + (2h_0^2 - h^2)u + u_0 h^2}{u_0 - u}} \\ \lambda = \mp \frac{H_{12} + H_{13}}{p_z} (h_0^2 - u_0^2) \frac{u}{u_0 - u} \sqrt{\frac{u^3 - 3u_0 u^2 + (2h_0^2 - h^2)u + u_0 h^2}{u_0 - u}} \end{cases} \quad (8)$$

dove si è posto

$$H_{12} = \frac{E_{12} A_{12}}{(L_{12}^{(0)})^3}, \quad H_{13} = \frac{E_{13} A_{13}}{(L_{13}^{(0)})^3}, \quad (9)$$

$$u_0 = \frac{H_{12} x_2 + H_{13} x_3}{H_{12} + H_{13}}, \quad h_0^2 = \frac{H_{12} x_2^2 + H_{13} x_3^2}{H_{12} + H_{13}}. \quad (10)$$

La presenza d'un ramo secondario, costituito ancora da una curva chiusa, ma che non interseca più il ramo primario (Figura 2b), si rileva per valori dell'altezza del traliccio

$$h \geq h_{crit} = \sqrt{3\sqrt{u_0^2 (h_0^2 - u_0^2)^2 + 2h_0^2 - 3u_0^2}}. \quad (11)$$

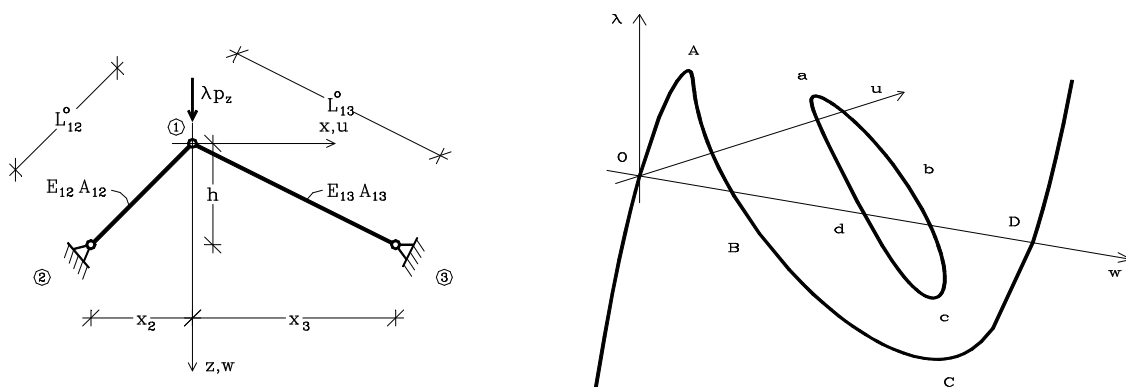


Figura 2: a) Travatura non simmetrica - b) Ramo primario e ramo secondario

Infine, è stata considerata la cupola reticolare a 13 nodi (Figura 3), già ampiamente

