

Un metodo per la determinazione del tiro nelle catene mediante identificazione dinamica

Domenico DARDANO, Juan Carlos MIRANDA, Bruno PERSICHETTI, Paolo VALVO
A.I.C.E. Consulting S.r.l.

SOMMARIO

La determinazione del tiro nelle catene metalliche presenti negli edifici esistenti, attraverso prove non distruttive, è un problema di notevole interesse nell'ambito della diagnostica strutturale, in particolare nel caso dell'edilizia storica e monumentale. In letteratura sono riportati numerosi metodi che consentono di ricavare il valore della forza assiale agente in un tirante metallico a partire da prove sperimentali di tipo statico o dinamico. Tuttavia, alcuni di tali metodi si basano su ipotesi semplificative (ad es., trascurabilità della rigidità flessionale della catena) e conducono a stime eccessivamente approssimate; altri metodi risultano più accurati, ma richiedono procedure esecutive lunghe e laboriose per ricavare i valori dei diversi parametri incogniti.

Il nuovo metodo messo a punto dagli autori della presente memoria consente di determinare il tiro agente in una catena attraverso l'identificazione strutturale basata su prove sperimentali di tipo dinamico. A tale scopo, in primo luogo è stato definito un modello meccanico che rappresenta la catena come una trave tenso-inflessa, di geometria e massa note, dotata di incastri elastici ad entrambe le estremità. L'equazione differenziale del moto della catena è stata risolta per via analitica attraverso il metodo di separazione delle variabili, ricavando così il legame fra i parametri incogniti, cioè il tiro e le rigidità dei vincoli elastici alle estremità della trave, e le frequenze proprie corrispondenti ai primi modi di vibrare.

L'applicazione del metodo è semplice ed efficace. Attraverso un'unica acquisizione dinamica, eseguita con un accelerometro collocato in posizione opportuna sulla catena, si determina tramite la trasformata rapida di Fourier lo spettro di risposta in frequenza. Da quest'ultimo si ricavano i valori delle prime frequenze proprie. Infine, attraverso la soluzione numerica di un sistema non lineare di equazioni, si identificano i parametri strutturali incogniti, cioè le rigidità dei vincoli ed il tiro.

L'efficacia del metodo è stata testata, come primo caso applicativo, sulle catene della torre campanaria della Cattedrale di Ruvo di Puglia. I risultati ottenuti sono stati comparati con quelli di una prova di rilascio con estensimetri, conseguendo un buon accordo. Ulteriori studi e sperimentazioni *in situ* ed in laboratorio sono in corso per giungere ad una validazione piena del metodo.

Introduzione

L'inserimento di "catene", cioè di tiranti metallici, alla base di archi e volte è una tecnica tradizionalmente utilizzata allo scopo di contrastare le "spinte" che tali elementi strutturali esercitano sulle proprie imposte. La conoscenza dell'entità del "tiro", vale a dire della forza assiale di trazione, agente nelle catene installate in una costruzione è di fondamentale importanza per la determinazione dello stato di sollecitazione presente in essa. Nel caso di una nuova costruzione il tiro in una catena può essere misurato direttamente durante la sua messa in opera. Al contrario, la determinazione del tiro in una catena esistente, quando non si possono applicare metodi diretti di misura, rimane un problema non sempre superabile in maniera efficiente e con la dovuta precisione. Infatti, sebbene in letteratura siano riportati numerosi metodi sperimentali ideati a tale scopo, tuttavia, alcuni di essi si basano su ipotesi semplificative e conducono a stime eccessivamente approssimate; altri metodi risultano più accurati, ma richiedono procedure esecutive lunghe e laboriose.

Il metodo sperimentale concettualmente più semplice per misurare il tiro di una catena esistente è rappresentata dalla cosiddetta "prova di rilascio". Tale prova, eseguibile solo se la catena è provvista di "tenditori", consiste nel rilasciare gradualmente la catena fino ad annullarne la sollecitazione, misurando tramite estensimetri la deformazione assiale preesistente. Conoscendo le caratteristiche geometriche e il modulo elastico del tirante, si risale al tiro. Questo metodo, tuttavia, non è applicabile in molti casi o perché i tenditori non sono presenti o perché il loro cattivo stato non ne consente l'allentamento o, infine, perché il rilascio della catena potrebbe pregiudicare la sicurezza strutturale del manufatto in questione. Diviene allora obbligatorio il ricorso a metodi indiretti, basati cioè sulla misura di altre grandezze fisiche che dal tiro dipendono.

I metodi indiretti si distinguono in statici e dinamici. Il metodo dinamico tradizionale, nella sua formulazione più semplice, modella la catena come una "corda vibrante", priva di rigidità flessionale, e consente di ricavare il valore del tiro in funzione della frequenza corrispondente al primo modo di vibrare [1]. Il metodo è di semplice applicazione, ma fornisce risultati accurati solo quando le catene sono molto snelle e tese; pertanto, esso non è di norma applicabile nel caso di edifici storici, dove spesso le catene sono tozze e poco sollecitate. Il metodo statico tradizionale, invece, fornisce il tiro sulla base della misura dell'inflexione della catena, modellata come una trave tensoinflexa, sotto l'azione di un carico noto [2]. Il metodo statico necessita di misure più laboriose rispetto a quello dinamico. Esso, inoltre, impone di formulare ipotesi sulla natura dei vincoli alle estremità della catena che, in generale, possono variare dal caso di cerniere ideali a quello di incastri perfetti. La stessa incertezza sui vincoli, peraltro, riguarda anche il metodo dinamico, qualora nel modello si voglia tener conto della rigidità flessionale del tirante.

Un modello meccanico sufficientemente elaborato da consentire un'interpretazione teorica accurata delle prove sperimentali, statiche o dinamiche, ma abbastanza semplice da permettere una trattazione analitica del problema, è quello che schematizza la catena come una trave elastica tensoinflexa, dotata di rigidità flessionale non trascurabile e di vincoli elastici alle estremità (Fig. 1). Supponendo note sia la geometria del problema sia le proprietà meccaniche del materiale che costituisce la catena, rimangono tre parametri incogniti da determinare: il tiro nella catena, N , e le rigidità delle molle rotazionali, k_A e k_B . È evidente, dunque, che la misura di un unico parametro non potrà essere sufficiente per risolvere univocamente il problema. Per superare tale inconveniente, sono stati proposti in letteratura numerosi metodi sperimentali basati sull'esecuzione di più misure di tipo statico [3, 4, 5], dinamico [6] o misto [7, 8].

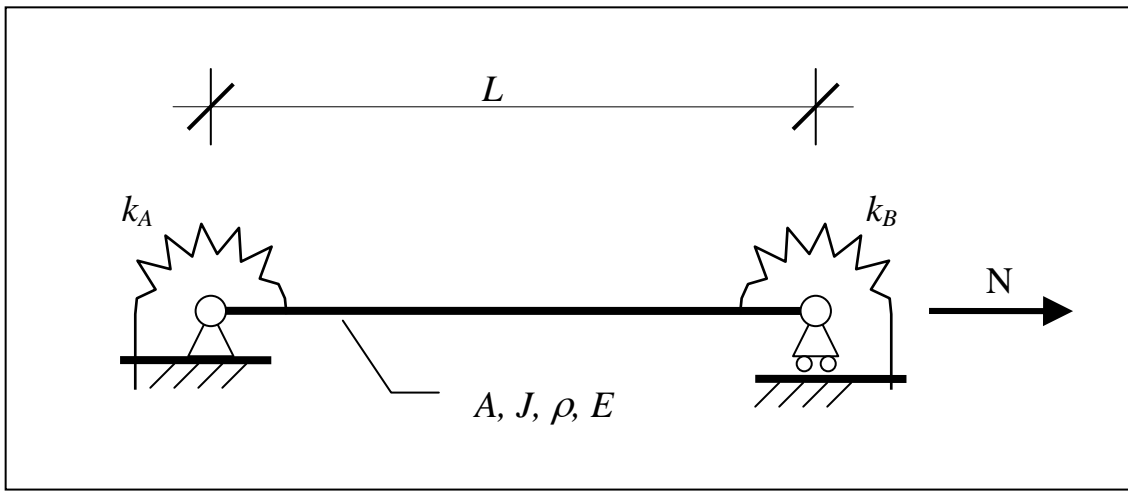


Figura 1 – Schema statico del modello della catena.

In questa memoria, si presenta un nuovo metodo che consente di determinare il tiro agente in una catena metallica, contemporaneamente al grado d'incastro presente alle sue estremità, attraverso una tecnica d'identificazione dinamica. A tale scopo, si è in primo luogo formulato il problema attraverso la scrittura dell'equazione differenziale del moto della catena, corredata dalle opportune condizioni al contorno. Il problema analitico è stato risolto utilizzando il classico metodo di separazione delle variabili. In questo modo, si è ricavato un sistema non lineare di tre equazioni in tre incognite, che lega i tre parametri incogniti alle tre frequenze proprie corrispondenti ai primi modi di vibrare.

L'applicazione del metodo è semplice e speditiva: infatti, mediante un'unica acquisizione dinamica, eseguita utilizzando un accelerometro posto in posizione opportuna sulla catena, si determina tramite la trasformata rapida di Fourier lo spettro in frequenza e, da quest'ultimo, si ricavano i valori delle prime tre frequenze proprie. Il sistema non lineare d'equazioni di cui sopra viene, quindi, risolto per via numerica attraverso un "foglio di calcolo", installato su un comune computer portatile. Si ottengono così in tempo reale i valori del tiro e delle rigidità incognite.

Come prima applicazione, il metodo è stato testato sulle catene della torre campanaria del duomo di Ruvo di Puglia, nell'ambito di una più ampia campagna d'indagini diagnostiche che ne ha interessato le strutture murarie.

Modello analitico

Schematizzando la catena come una trave di lunghezza L e sezione trasversale costante, tesa da una forza assiale N , se ne può scrivere l'equazione differenziale del moto come segue:

$$EJ \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

dove A e J sono, rispettivamente, l'area e il momento d'inerzia della sezione; ρ ed E sono, rispettivamente, la densità e il modulo di Young del materiale che costituisce la catena; $w(x, t)$ è lo spostamento in direzione trasversale della sezione di ascissa x al tempo t .

Le condizioni al contorno, da affiancare alla (1), si scrivono imponendo, ad ogni istante del moto, l'annullarsi degli spostamenti trasversali alle estremità:

$$w(x, t)|_{x=0} = 0 \quad \text{e} \quad w(x, t)|_{x=L} = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2a, b)$$

e la presenza di momenti di incastro proporzionali alle rotazioni nelle medesime sezioni:

$$-EJ \frac{\partial w^2(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = -k_A \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \text{e} \quad -EJ \frac{\partial w^2(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = k_B \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L}, \quad \forall t \geq 0, \quad (2c, d)$$

dove k_A e k_B sono, rispettivamente, le rigidità delle molle rotazionali alle estremità $x = 0$ e $x = L$. Per completare il problema differenziale, in generale, sarebbe necessario definire anche le condizioni iniziali, che descrivono lo stato in cui si trova la struttura al tempo $t = 0$. Tali condizioni, tuttavia, non interessano in questo contesto e, pertanto, la loro specificazione viene omessa per ragioni di brevità.

Secondo il metodo di separazione delle variabili [9], si cercano soluzioni della (1) di tipo:

$$w(x, t) = X(x) T(t), \quad (3)$$

dove $X(x)$ e $T(t)$ sono, rispettivamente, funzioni della sola x e del solo t . Omettendo per semplicità i passaggi intermedi, si giunge infine alle seguenti espressioni per la soluzione:

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + C \exp(\beta x) + D \exp(-\beta x); \quad (4a)$$

$$T(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t; \quad (4b)$$

dove A, B, C, D, E, F sono costanti di integrazione, da determinare imponendo le condizioni al contorno e le condizioni iniziali; ω è la pulsazione del moto armonico (legata alla frequenza, $f = \omega / 2\pi$); inoltre, si è posto:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4(\lambda\omega/c)^2} - 1}{2\lambda^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4(\lambda\omega/c)^2} + 1}{2\lambda^2}}; \quad (5a, b)$$

con

$$\lambda^2 = \frac{EJ}{N} \quad \text{e} \quad c^2 = \frac{N}{\rho A}. \quad (6a, b)$$

Per inciso, si osserva che i parametri α e β hanno le dimensioni dell'inverso di una lunghezza [1/m], λ ha le dimensioni di una lunghezza [m] e c quelle di una velocità [m/s]. Sostituendo l'espressione (4a) nella (3) e questa, insieme alle sue derivate, nelle condizioni al contorno (2), si ottiene un sistema lineare omogeneo di quattro equazioni nelle quattro costanti d'integrazione incognite, A, B, C e D . Affinché siano possibili soluzioni non banali del problema, cioè caratterizzate da spostamenti trasversali w diversi da zero, è necessario che si annulli il determinante della matrice dei coefficienti di tale sistema di equazioni, ovvero che sia

$$DET = 2\left(\frac{EJ}{L}\right)^2 (d_1 \sinh \beta L + d_2 \cosh \beta L - 2\mu_A \mu_B \alpha \beta) = 0, \quad (7)$$

dove

$$d_1 = (\mu_A + \mu_B)\alpha(\alpha^2 + \beta^2)L \cos \alpha L + [\mu_A \mu_B(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2)^2 L^2] \sin \alpha L; \quad (8a)$$

$$d_2 = 2\mu_A \mu_B \alpha \beta \cos \alpha L - (\mu_A + \mu_B)\beta(\alpha^2 + \beta^2)L \sin \alpha L; \quad (8b)$$

e si sono introdotte le rigidezze adimensionali delle molle rotazionali,

$$\mu_A = \frac{k_A L}{EJ} \quad \text{e} \quad \mu_B = \frac{k_B L}{EJ}. \quad (9a, b)$$

Risoluzione numerica

Risolvendo per via numerica l'equazione (7) è possibile affrontare, innanzi tutto, il problema "diretto" nel quale, noto il tiro N e le rigidezze k_A e k_B , si cercano le frequenze relative alle oscillazioni libere della catena. L'equazione non lineare (7) ammette, infatti, infinite soluzioni corrispondenti agli infiniti modi di vibrare della struttura. Inoltre, si può risolvere il problema d'identificazione strutturale dinamica, alla base del metodo sperimentale qui proposto, dove i parametri meccanici della struttura sono incogniti, mentre si conoscono le frequenze. A tale scopo, occorre scrivere l'equazione (7) più volte, una per ciascun valore noto della frequenza, ottenendo un sistema non lineare di equazioni, la cui soluzione fornisce nel contempo i valori del tiro e delle rigidezze.

Per semplicità di esposizione, nel seguito ci si limita a considerare il caso, peraltro non infrequente nella pratica, in cui i vincoli di estremità della trave sono uguali fra loro, per cui $k_A = k_B = k$ e $\mu_A = \mu_B = \mu$. Le incognite del problema d'identificazione si riducono allora a due, sicché per determinarle univocamente è sufficiente conoscere solo le prime due frequenze proprie della catena.

Si definisce, inoltre, il "grado di incastro", G , come il rapporto tra il momento d'incastro della trave con incastri elastici e quello della trave con incastri perfetti, entrambe soggette al medesimo carico uniformemente distribuito. Dopo alcuni passaggi, qui omessi per brevità, si perviene alla seguente espressione,

$$G = \frac{\mu(\mu + 6)}{\mu^2 + 8\mu + 12}. \quad (10)$$

È facile verificare che i valori forniti dalla (10) variano nell'intervallo compreso tra 0 e 1, estremi che corrispondono, rispettivamente, al caso di trave incernierata e a quello di trave perfettamente incastrata.

A titolo di esempio, si considera una catena di lunghezza $L = 5.00$ m, sezione trasversale circolare di diametro $d = 40$ mm, modulo di Young $E = 206000$ MPa e densità $\rho = 7830$ kg/m³. La Fig. 2 è relativa alla soluzione del problema diretto, in cui la catena si suppone soggetta ad un tiro noto $N = 100$ kN, corrispondente ad uno sforzo normale $\sigma = 79.6$ MPa. Il grafico mostra l'andamento delle prime tre frequenze proprie, f_1 , f_2 e f_3 , calcolate utilizzando l'equazione (7), in funzione del grado d'incastro G . Ciascuna frequenza risulta

funzione monotona crescente del grado d'incastro ed assume valori compresi tra quelli corrispondenti ai casi limite di trave con cerniere e trave con incastri.

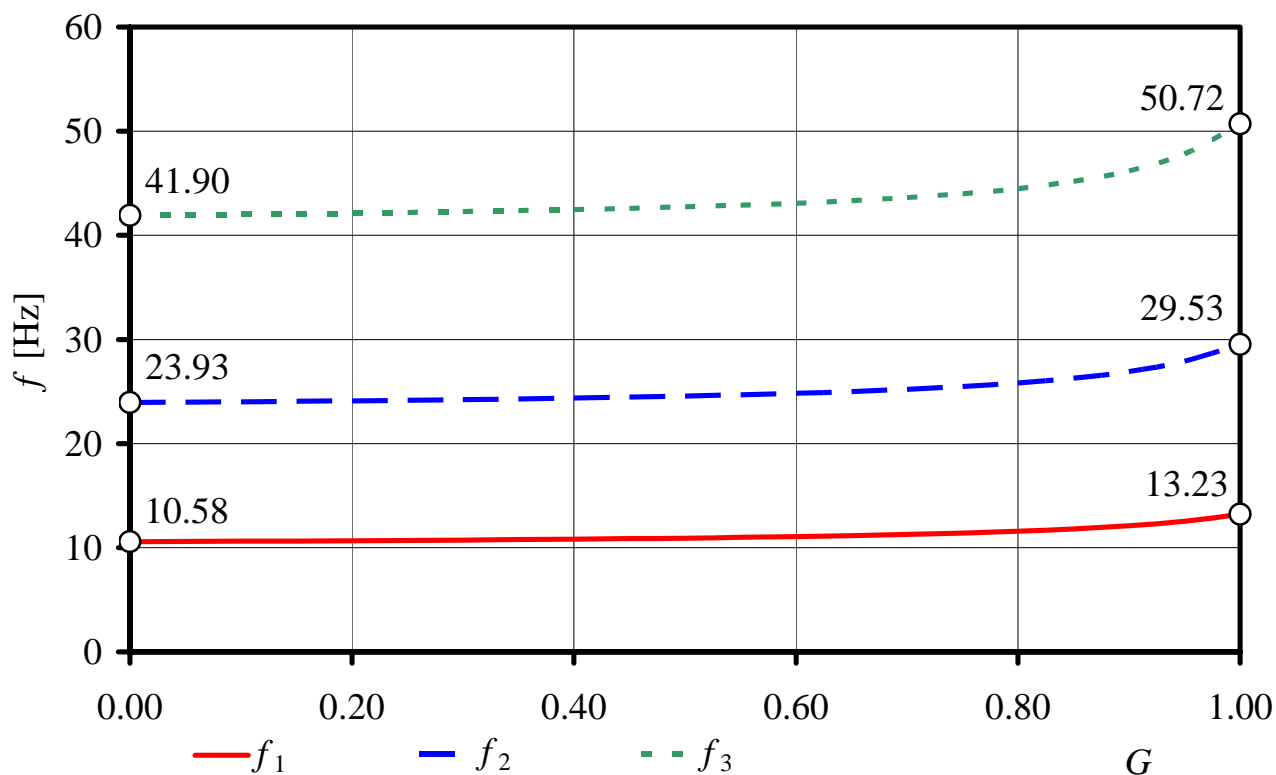


Figura 2 – Frequenze proprie in funzione del grado d'incastro.

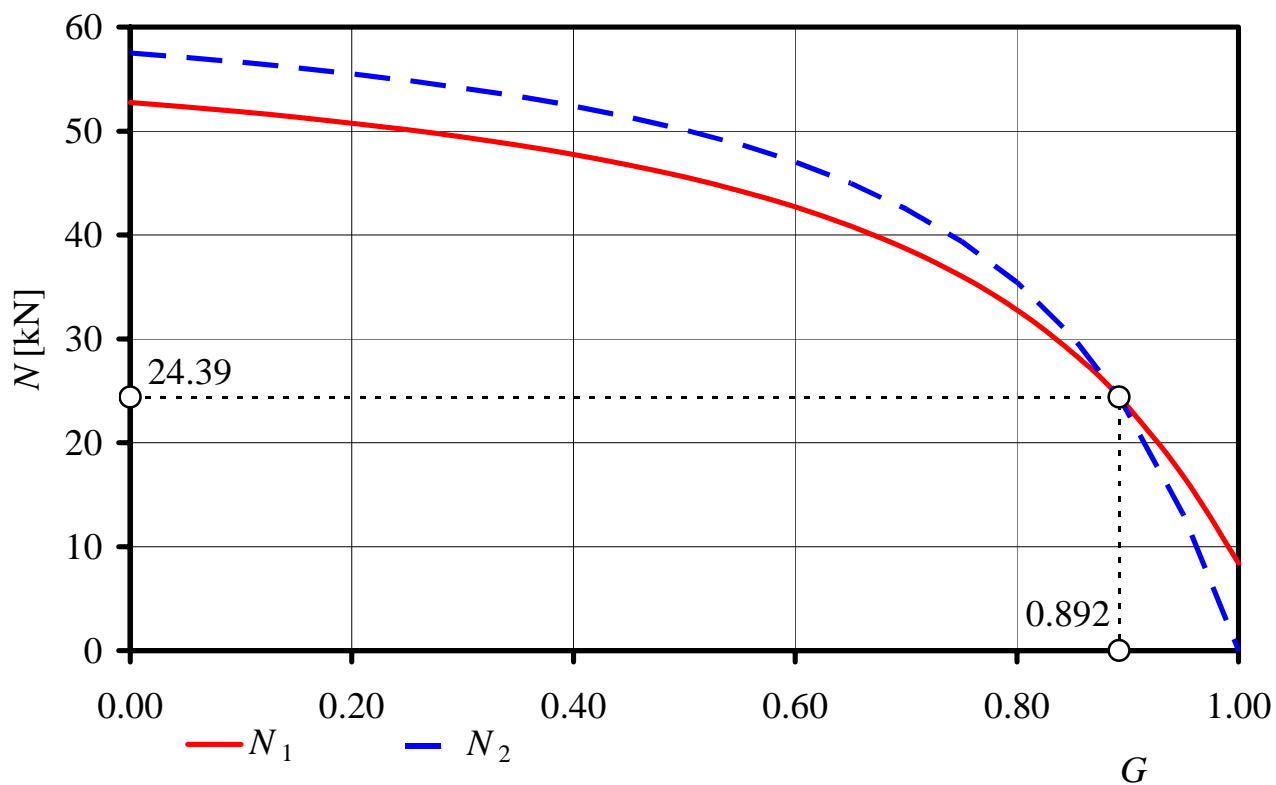


Figura 3 – Tiro in funzione del grado d'incastro.

La Figura 3 si riferisce, invece, alla soluzione di un problema d'identificazione strutturale. Supponendo note le prime due frequenze proprie della struttura, $f_1 = 8.0$ Hz e $f_2 = 20.0$ Hz, attraverso l'equazione (7) si sono calcolati i corrispondenti valori del tiro, N_1 ed N_2 , riportati nel grafico in funzione del grado d'incastro. L'intersezione tra le due curve fornisce per via grafica la soluzione del problema, che corrisponde un tiro $N = 24.39$ kN e ad un grado d'incastro $G = 0.892$. Quest'ultimo, utilizzando le relazioni (9) e (10), consente di ricavare il valore della rigidità delle molle, $k = 85697$ N mm / rad.

Esempio applicativo

L'esecuzione di una campagna d'indagini diagnostiche sulle strutture murarie della torre campanaria della Cattedrale di Ruvo di Puglia (Fig. 4a), nel periodo 2002-2003, è stata l'occasione per mettere alla prova il metodo delineato nei paragrafi precedenti. Le indagini includevano un ampio numero di rilievi, prove sperimentali e modellazioni numeriche finalizzate alla determinazione delle caratteristiche fisico-meccaniche dei materiali lapidei e del loro stato di conservazione, all'analisi del comportamento statico dell'opera ed, infine, all'individuazione degli interventi conservativi eventualmente necessari.

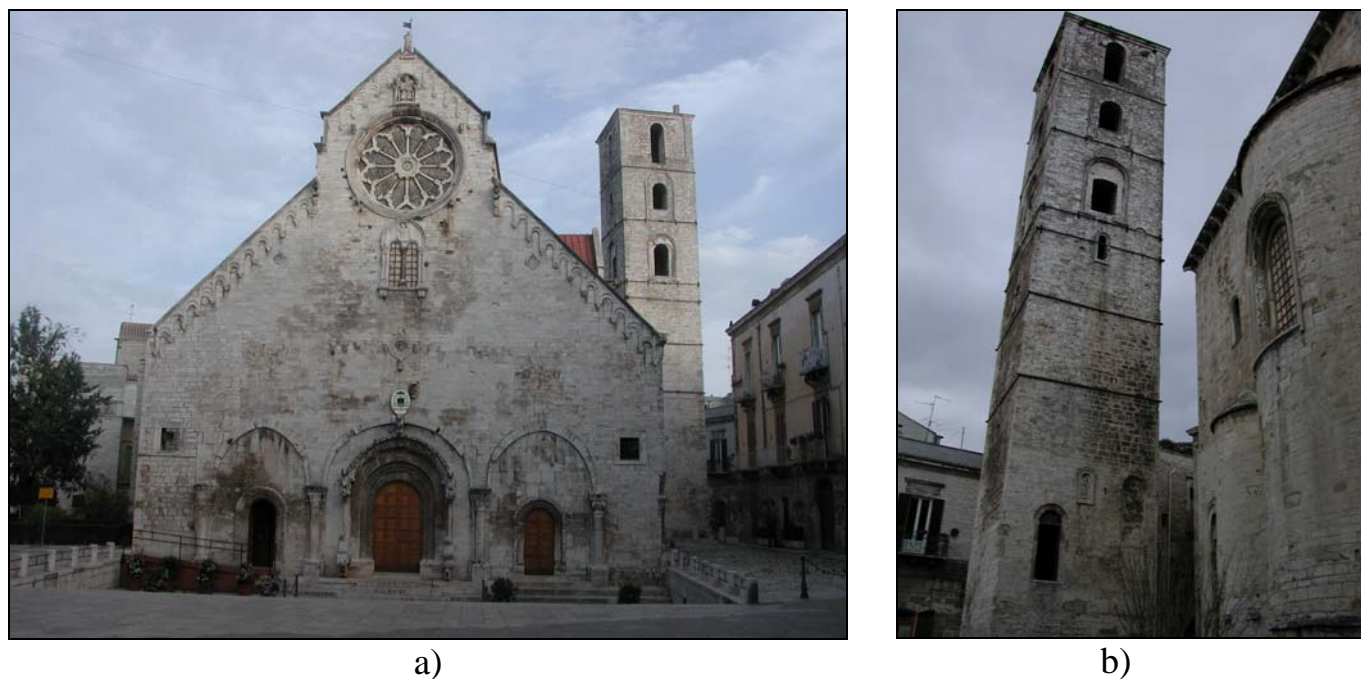


Figura 4 – Cattedrale di Ruvo di Puglia: a) facciata; b) torre campanaria.

La torre campanaria (Fig. 4b), la cui costruzione risale all'XI secolo, sorge isolata in prossimità dell'angolo Sud-Est del transetto. Essa presenta una tipica pianta quadrata di circa 6 m di lato ed ha un'altezza di circa 35 m fuori terra. I muri perimetrali hanno spessore 125 cm circa e sono costituiti da una muratura di conci ben squadrati di tipico calcare bianco e malta di calce. La torre presenta tre ordini di aperture ai livelli più alti; alle quote inferiori (sotto le celle campanarie) sono presenti luci di modeste dimensioni per l'illuminazione delle scale. Internamente si riconoscono sette livelli. Il primo livello, posto sotto il piano di campagna (quota $-5,50$ m), è inaccessibile sebbene ispezionabile attraverso una piccola apertura praticata sulla pavimentazione del piano terra. I livelli superiori sono raggiungibili mediante scale di legno, ad eccezione del collegamento tra il

quarto ed il quinto livello (secondo e terzo piano fuori terra) che è costituito da una scala realizzata mediante archi rampanti in pietra che si sviluppano sul perimetro interno della torre. I muri sono collegati da volte cilindriche fino al quinto livello (quote +0,00 m, +4,06 m, +8,44 m e +19,40 m), mentre a quota +19,90 m (immediatamente sopra la volta del quinto livello) è stato realizzato in epoca moderna un solaio in latero-cemento. Ai piani superiori (quote +24,96 m e +29,37 m) si trovano due solai lignei che consentono l'accesso alle celle campanarie. La copertura è costituita da un elemento piramidale in calcestruzzo.

All'epoca delle indagini, era presente nel manufatto un complesso sistema di tiranti di acciaio, frutto di un intervento di consolidamento risalente alla metà del Novecento. I tiranti erano disposti su sei livelli: in corrispondenza delle rampe di scala in pietra (quote +11,28 m e +15,07 m), all'intradosso della volta del quinto livello (quota +18,56 m), in corrispondenza del solaio in latero-cemento (quota +19,83 m) e all'intradosso dei solai lignei (quote +24,75 m e +29,16 m). A ciascun livello erano presenti due coppie di catene che collegavano le murature perimetrali contrapposte, passando per il vano interno della torre (Fig. 5a), e quattro tiranti disposti ad anello sulle facciate esterne (Fig. 5b).



a)



b)

Figura 5 – Sistema di tiranti metallici: a) catene interne; b) cerchiature esterne.

Le catene interne erano realizzate con barre di sezione circolare, collegate tramite piastre bullonate ai rispettivi anelli esterni e dotate di tenditori nella mezzeria. Questi ultimi erano costituiti da elementi cavi a doppia filettatura, il cui serraggio era assicurato da controdadi disposti ai due lembi. I tiranti esterni, invece, erano elementi piatti sui tre livelli inferiori e barre tonde con tenditori sui tre livelli superiori. L'aspetto di tutti gli elementi metallici era profondamente degradato a causa della corrosione.

Una delle catene interne, precisamente quella del primo livello in prossimità del muro Sud, è stata scelta per testare il metodo sperimentale per la determinazione del tiro. La luce netta della catena, misurata tra le murature interne, era $L = 3.50$ m, il diametro della sezione $d = 30$ mm. Per determinare le frequenze proprie di oscillazione della catena, si è applicato un accelerometro a $1/4$ della luce libera e si sono acquisite le accelerazioni corrispondenti alle oscillazioni libere dovute alle vibrazioni ambientali. La strumentazione utilizzata per l'esecuzione della prova era costituita da un sensore accelerometrico piezoelettrico B&K 4370 (Fig. 6a), collegato ad un sistema di acquisizione SCXI (Signal

Conditioning eXtensions for Instrumentation) della National Instruments Corporation, costituito da un modulo accelerometrico ICP (Integrated Circuit Piezoelectric) SCXI-1531 ad otto canali connesso ad una scheda DAQCard 6062-E (PCMCIA). La scheda acquisisce, misura e testa segnali elettrici condizionati dai sensori attraverso il modulo suddetto e li trasmette ad un personal computer portatile dotato di microprocessore AMD K6 550 MHz e 120 MByte di memoria RAM (Fig. 6b). L'apposito software LabVIEW ver. 6.1 della National Instruments, opportunamente programmato e tarato, ha consentito di elaborare i segnali e di eseguire la trasformata rapida di Fourier (FFT) per ottenere lo spettro in frequenza. Da quest'ultimo, è stato possibile risalire ai valori delle prime due frequenze proprie pari, rispettivamente, a $f_1 = 12.01$ Hz e $f_2 = 30.68$ Hz.

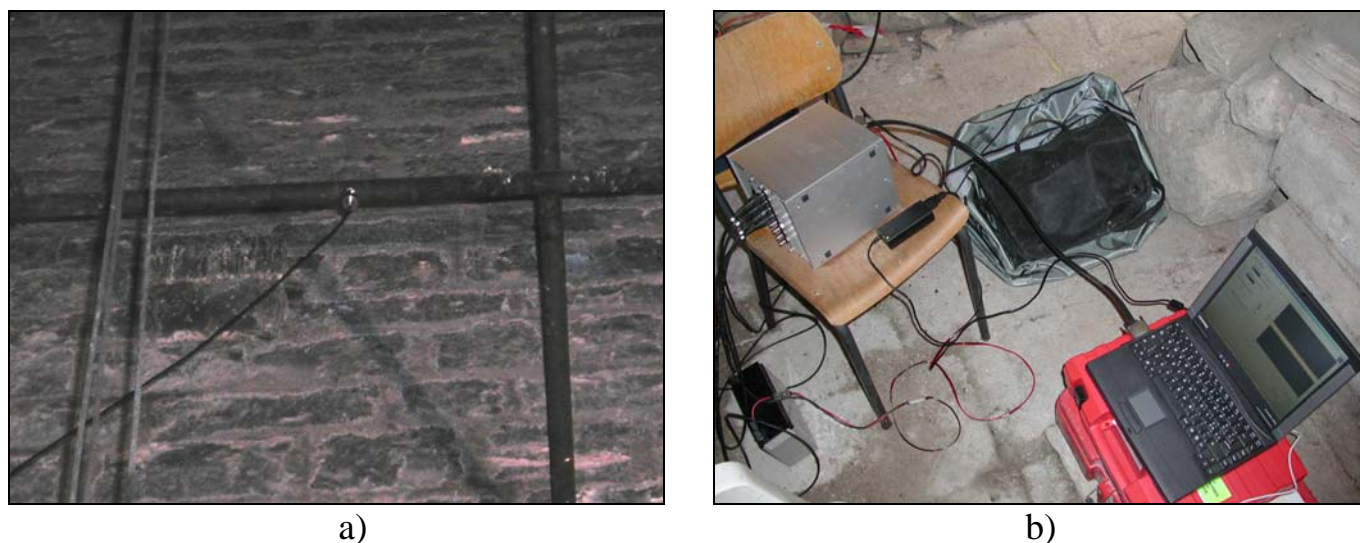


Figura 6 – Acquisizioni dinamiche sulla catena: a) accelerometro; b) centralina.

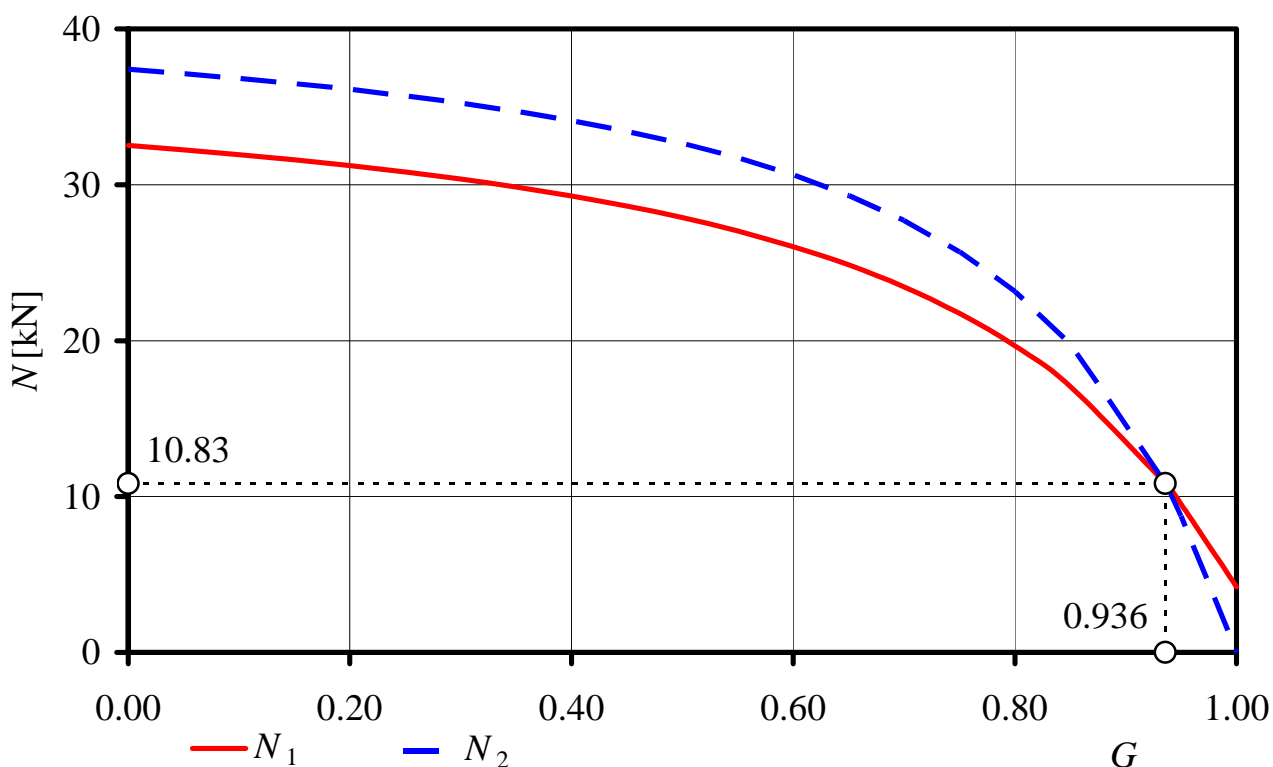


Figura 7 – Determinazione del tiro e del grado di incastro per le catene di Ruvo.

Utilizzando per l'acciaio i valori consueti del modulo di Young, $E = 206000$ MPa, e della densità, $\rho = 7830$ kg/m³, si è risolta l'equazione (7) per ricavare i valori del tiro, N_1 ed N_2 , corrispondenti alle due frequenze misurate. Tali valori sono stati riportati in un grafico in funzione del grado d'incastro (incognito), ottenendo due curve la cui intersezione fornisce la soluzione del problema d'identificazione strutturale (Fig. 7). Si trova un tiro $N = 10.83$ kN, corrispondente ad uno sforzo normale $\sigma = 15.3$ MPa; il grado d'incastro risulta $G = 0.936$ e la rigidezza delle molle $k = 68157$ N mm / rad. Per inciso, si nota che, sebbene il grado d'incastro sia molto elevato e prossimo all'unità, si sarebbe commesso un notevole errore se si fossero supposte le estremità della catena perfettamente incastrate: infatti, in tal caso, il tiro sarebbe stato $N = 4.19$ kN.

Infine, per confrontare il metodo proposto con una tecnica nota, si è eseguita sulla stessa catena una prova di rilascio. Sui lembi superiore ed inferiore a 1/3 della luce libera della barra sono stati applicati strain gauges tipo HBM 10/120LY11, incollati con colla HBM-Z 70. Quindi, si è rilasciato il tenditore, misurando la deformazione recuperata dalla catena. La deformazione misurata a rilascio avvenuto, $\varepsilon = 73 \times 10^{-6}$, consente di risalire al tiro $N = EA\varepsilon = 10.63$ kN, valore prossimo a quello ottenuto attraverso l'identificazione dinamica.

Considerazioni conclusive

Il nuovo metodo proposto per la determinazione del tiro nelle catene, basato sull'identificazione strutturale attraverso prove dinamiche, appare efficace e di semplice esecuzione. Esso si presenta particolarmente promettente nel caso degli edifici storici, dove spesso si trovano catene tozze e poco sollecitate, soggette a condizioni di vincolo incognite (spesso più prossime all'incastro), per le quali i metodi tradizionali risultano poco efficaci. Una prima applicazione del metodo ed un primo confronto con una tecnica nota hanno dato buoni risultati. Tuttavia, altre esperienze *in situ* ed in laboratorio sono necessarie per comprovarne a pieno la validità. Ulteriori studi a tal fine sono in corso.

Bibliografia

1. O. Belluzzi - "Scienza delle costruzioni", Bologna 1960, Volume 4, pp 334-342.
2. P. Pozzati - "Teoria e tecnica delle strutture", Torino 1977, Volume 2*, pp 168-170.
3. S. Briccoli Bati e U. Tonietti - "Determinazione dello sforzo nelle catene metalliche di vecchi edifici", Atti 7° Congresso Nazionale dell'AIPnD, Ferrara, 1993, pp 475-481.
4. S. Briccoli Bati e U. Tonietti - "Experimental methods for estimating in situ tensile force in tie-rods", Journal of Engineering Mechanics, Volume 127, N° 12, 2001, pp 1275-1283.
5. M.L. Beconcini - "Un metodo pratico per la determinazione del tiro nelle catene", Costruire in laterizio, N° 54, 1996, pp 299-301.
6. C. Urbano - "Sulla determinazione del tiro nelle catene degli archi: considerazioni teoriche ed applicazioni sperimentali", Costruzioni metalliche, N° 5, 1967, pp 315-323.
7. C. Blasi e S. Sorace - "Sulla determinazione del "tiro" nelle catene mediante prove statiche e dinamiche", Atti III Congresso Nazionale ASS.I.R.C.CO., Catania, 1988, pp 195-205.
8. C. Blasi e S. Sorace - "Determining the Axial Force in Metallic Rods", Structural Engineering International, N° 4, 1994, pp 241-246.
9. H.F. Weinberger - "A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods", New York, Dover 1995.