Università di Pisa

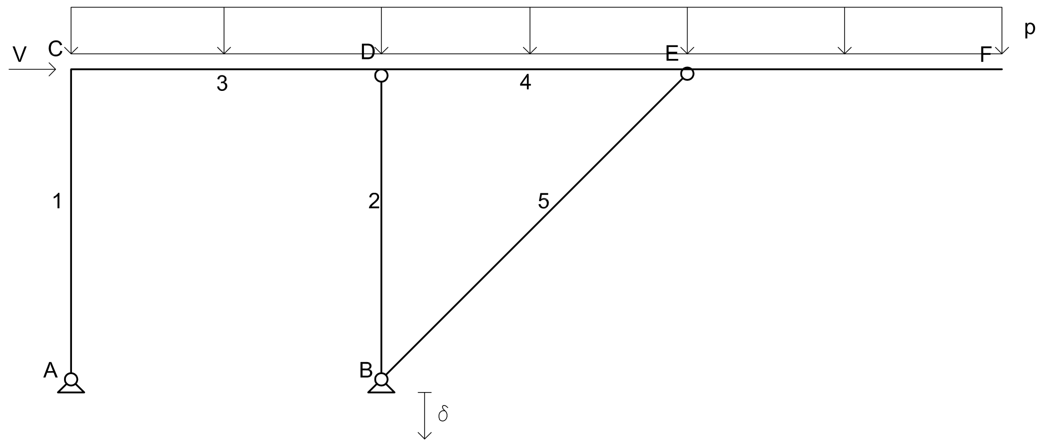
Anno Accademico 2011/2012

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Edile – Architettura

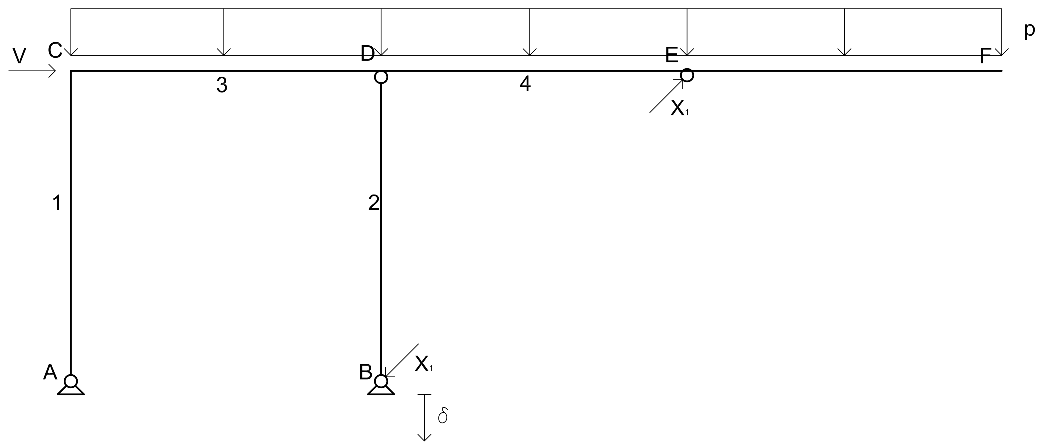
Insegnamento di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Docenti: Salvatore S. Ligarò & Paolo S. Valvo

ESERCITAZIONE DEL 16/04/2012



p
V
C
D
E
F
3
4
1
2
5
A
B
δ



p
V
C
D
E
F
3
4
X1
1
2
A
B
X1
δ

Si risolve anzitutto la trave isostatica EF, trovando le reazioni vincolare in E:

$$\begin{cases} N_E = 0 \\ T_E = -p \cdot L \\ M_E = p \cdot \frac{L^2}{2} \end{cases}$$

Facendo il computo dei vincoli si ha $2 + (2 + 2) + 2 + 2 - 3 \cdot 3 = 1$: la struttura è una volta iperstatica.
Eliminiamo l'asta 5 ipotizzando come incognita iperstatica X l'azione che questa asta produce nel sistema effettivo.
Lo spostamento generalizzato corrispondente all'incognita X nel sistema effettivo è:

$$\eta_1 = -\frac{X}{EA}\sqrt{2}L$$

Si scompone il sistema effettivo nella somma di due sottosistemi.

Sistema 0:
Equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \sum X = 0 & X_A + V = 0 \\ \sum Y = 0 & Y_A - p \cdot (2L) + Y_B - Y_E = 0 \\ M_A = 0 & Y_B \cdot L - V \cdot L - p \cdot (2L) \cdot \frac{(2L)}{2} - M_E - Y_E \cdot 2L = 0 \end{cases}$$

sostituendo $V = p \cdot L$ e risolvendo si ha

$$\begin{cases} \sum X = 0 & X_A = -V \\ \sum Y = 0 & Y_A = 2pL - \frac{11}{2}pL + pL = -\frac{5}{2}pL \\ M_A = 0 & Y_B = \frac{p \cdot L \cdot L + p \cdot (2L) \cdot \frac{(2L)}{2} + p\frac{L^2}{2} + pL^2 \cdot (2L)}{L} = \frac{11}{2}pL \end{cases}$$

troviamo le caratteristiche della sollecitazione:

TRAVE	TRATTO	N_0	T_0	M_0
1	$0 \leq x \leq L$	$+\frac{5}{2}pL$	$+pL$	$+pL \cdot x$
2	$0 \leq x \leq L$	$-\frac{11}{2}pL$	0	0
3	$0 \leq x \leq L$	0	$-\frac{5}{2}pL - px$	$+pL \cdot L - \frac{5}{2}pL \cdot x - p\frac{x^2}{2}$
4	$0 \leq \overline{x} \leq L$	0	$+pL + p\overline{x}$	$-p\frac{L^2}{2} - pL\overline{x} - p\frac{\overline{x}^2}{2}$

Sistema 1:
La forza che era esercitata dall'asta 5, è indicata dall'incognita X. Nel sistema 1 si applicano due forze uguali e opposte di modulo pari a 1. Una di queste scarica direttamente sul vincolo in B, quindi la travatura non risente dell'azione di questa forza: possiamo trovare le sollecitazioni della struttura, senza considerare la forza agente sul vincolo in B. Quando troveremo il lavoro compiuto dal cedimento vincolare in B, dovremo però sommare alla reazione vincolare verticale di B, la componente verticale della forza che avevamo trascurato.
Equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \sum X = 0 & X_A + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum Y = 0 & Y_A + Y_B + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ M_A = 0 & Y_B \cdot L + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2L) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot L = 0 \end{cases}$$

risolvendo si ha

$$\begin{cases} \sum X = 0 & X_A = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sum Y = 0 & Y_A = -Y_B - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ M_A = 0 & Y_B = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

troviamo le caratteristiche della sollecitazione:

TRAVE	TRATTO	N_0	T_0	M_0
1	$0 \leq x \leq L$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x$
2	$0 \leq x \leq L$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0
3	$0 \leq x \leq L$	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{2}}L$
4	$0 \leq \overline{x} \leq L$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}x$

Calcolo dei lavori virtuali:

Sistema 0:

$$L_e^{1\to 0} = 1 \cdot \eta_{10} - Y_B \cdot \delta = \eta_{10}$$

$$L_e^{1\to 0} = 1 \cdot \eta_{10} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \delta = \eta_{10}$$

Si noti che alla rezione Y_B trovata precedentemente, si somma la componente verticale della forza applicata direttamente su B, che si era trascurata per trovare le sollecitazioni.

Si noti che

$$L_i^{1\to 0} = \sum \int_0^L \underline{F} \cdot \underline{\delta} dx =$$

$$\int_0^L (+pL \cdot x) \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x\right)}{EJ} dx + \int_0^L (0) \frac{(0)}{EJ} dx + \int_0^L \left(+pL \cdot L - \frac{5}{2} pL \cdot x - p\frac{x^2}{2}\right) \frac{\left(+\frac{1}{\sqrt{2}} L\right)}{EJ} dx + \int_0^L \left(-p\frac{L^2}{2} - pL\overline{x} - p\frac{\overline{x}^2}{2}\right) \frac{\left(+\frac{1}{\sqrt{2}} \overline{x}\right)}{EJ} d\overline{x}+$$

$$+ \int_0^L \left(+\frac{5}{2} pL\right) \frac{(0)}{EA} dx + \int_0^L \left(-\frac{11}{2} pL\right) \frac{\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{EA} dx + \int_0^L (0) \frac{(0)}{EA} dx + \int_0^L (0) \frac{(0)}{EA} d\overline{x} =$$

$$= \frac{pL}{\sqrt{2}} \frac{L^3}{EJ} + 0 + \left(\frac{p}{\sqrt{2}} L^3 \cdot L - \frac{5}{2\sqrt{2}} pL^2 \cdot \frac{L^2}{2} - \frac{p}{2\sqrt{2}} L \cdot \frac{L^3}{3}\right) \cdot \frac{1}{EJ} + \left(-\frac{p}{2\sqrt{2}} L^2 \cdot \frac{L^2}{2} - \frac{pL}{\sqrt{2}} \frac{L^3}{3} - \frac{p}{2\sqrt{2}} \frac{L^4}{4}\right) \cdot \frac{1}{EJ} +$$

$$+ 0 + \left(-\frac{11}{2\sqrt{2}} pL\right) \cdot \frac{L}{EA} + 0 + 0 =$$

$$= \frac{pL^4}{\sqrt{2} EJ} + \frac{12pL^4 - 15pL^4 - 2pL^4}{12\sqrt{2} EJ} + \frac{-6pL^4 - 8pL^4 - 3pL^4}{24\sqrt{2} EJ} - \frac{11pL^2}{2\sqrt{2} EA} =$$

$$= -\frac{3pL^4}{24\sqrt{2} EJ} - \frac{11pL^2}{2\sqrt{2} EA}$$

dato che

$$L_e^{1\to 0} = L_i^{1\to 0}$$

si ottiene

$$\eta_{10} = -\frac{pL^4}{8\sqrt{2} EJ} - \frac{11pL^2}{2\sqrt{2} EA}$$

Sistema 1:

$$L_e^{1\to 1} = 1 \cdot \eta_{11}$$

$$L_i^{1\to 0} = \sum \int_0^L \underline{F} \cdot \underline{\delta} dx =$$

$$\int_0^L \frac{\left(+\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x\right)^2}{EJ} dx + \int_0^L (0) \frac{(0)}{EJ} dx + \int_0^L \frac{\left(+\frac{1}{\sqrt{2}} L\right)^2}{EJ} dx + \int_0^L \frac{\left(+\frac{1}{\sqrt{2}} x\right)^2}{EJ} d\overline{x} +$$

$$+ \int_0^L (0) \frac{(0)}{EA} dx + \int_0^L \frac{\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{EA} dx + \int_0^L (0) \frac{(0)}{EA} dx + \int_0^L (0) \frac{(0)}{EA} d\overline{x} =$$

$$= \frac{1}{2EJ} \frac{L^3}{3} + 0 + \frac{L^2}{2EJ} L + \frac{1}{2EJ} \frac{L^3}{3} +$$

$$+ 0 + \frac{L}{2EA} + 0 + 0 =$$

$$= \frac{L^3 + 3L^3 + L^3}{6EJ} + \frac{L}{2EA} =$$

$$= \frac{5L^3}{6EJ} + \frac{L}{2EA}$$

dato che

$$L_e^{1\to 1} = L_i^{1\to 1}$$

si ottiene

$$\eta_{11} = \frac{5L^3}{6EJ} + \frac{L}{2EA}$$

per la compatibilità cinematica, si ricava l'incognita iperstatica X

$$\eta_1 = \eta_{10} + X\eta_{11}$$

$$-\frac{X}{EA}\sqrt{2}L = \left(-\frac{pL^4}{8\sqrt{2}EJ} - \frac{11pL^2}{2\sqrt{2}EA}\right) + X\left(\frac{5L^3}{6EJ} + \frac{L}{2EA}\right)$$

$$X = \frac{\frac{pL^4}{8\sqrt{2}EJ} + \frac{11pL^2}{2\sqrt{2}EA}}{\frac{5L^3}{6EJ} + \frac{L}{2EA} + \frac{\sqrt{2}L}{EA}}$$

(Soluzione a cura di Lorenzo Greco)