Università di Pisa

Anno Accademico 2011/2012

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Edile – Architettura

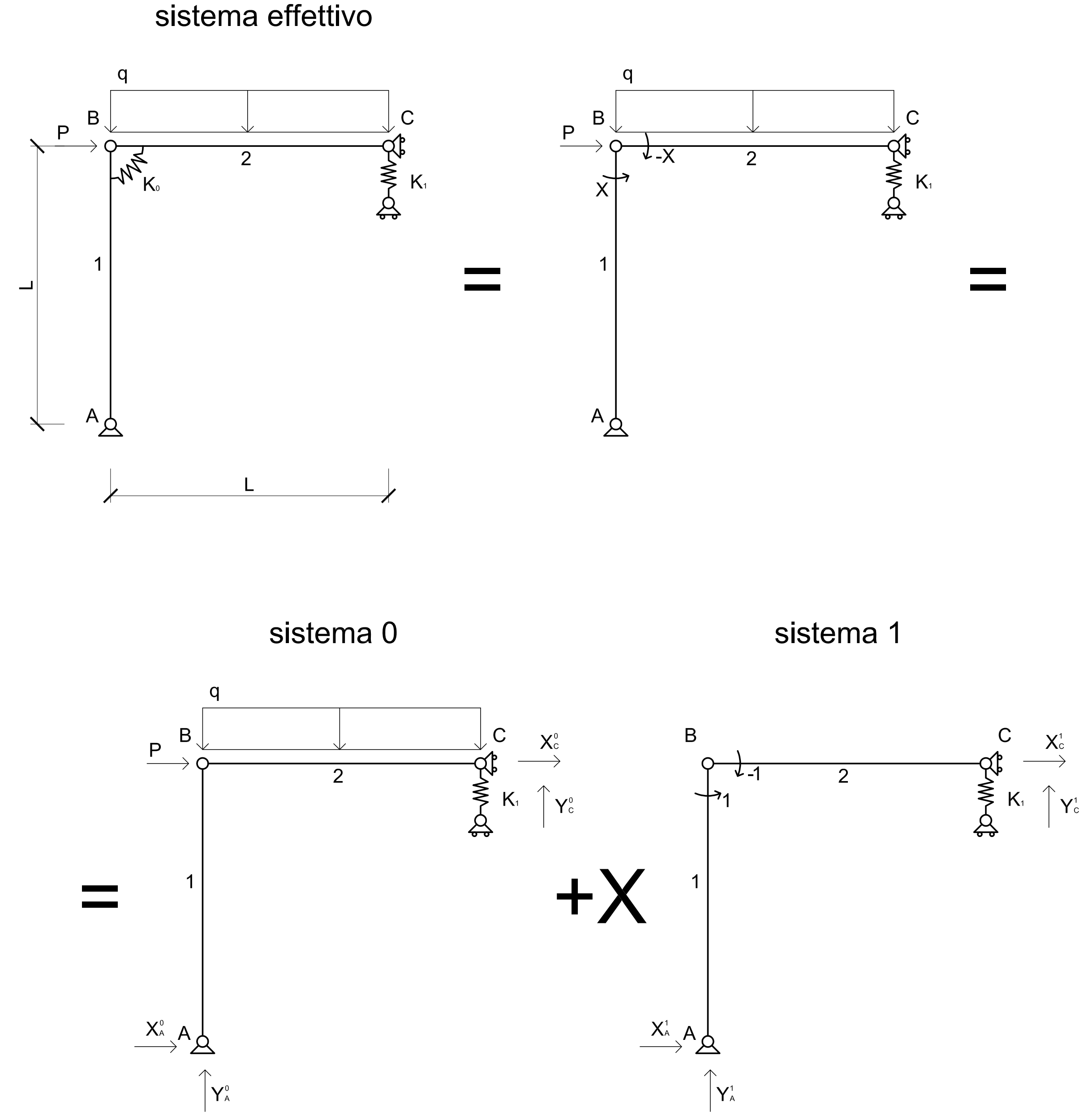
*Insegnamento di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI*

*Docenti: Salvatore S. Ligarò & Paolo S. Valvo*

*ESERCITAZIONE DEL 23/04/2012*

## Parte I

# Sistema una volta iperstatico e con molle



Per il computo dei vincoli, si considerano le molle come vincoli rigidi. Si ha $2+(2+1)+(1+1)-2\cdot 3=1$ la struttura è 1 volta iperstatica. Come incognita iperstatica $X$ scegliamo la forza agente sulla molla rotazionale in $B$. Lo spostamento generalizzato corrispondente all'incognita $X$ nel sistema effettivo è:

$$\eta_1 = -\frac{X}{K_0}$$

Si scompone il sistema effettivo nella somma di due sottosistemi.

*Sistema 0*:
Equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \sum X = 0 & X_A + X_C + P = 0 \\ \sum Y = 0 & Y_A + Y_C - q\cdot l = 0 \\ M_A = 0 & +Y_C\cdot l - X_c\cdot l - ql\cdot\frac{l}{2} - P\cdot l = 0 \end{cases}$$

per l'equazione ausiliaria, potremmo risolvere la trave BC, oppure notare che la reazione $X_A = 0$ perché la trave AB è un'asta reticolare. Sostituendo $P = q\cdot L$ e risolvendo si ha

$$\begin{cases} & X_A = 0 \\ \sum X = 0 & X_C = -P \\ \sum Y = 0 & Y_A = -\frac{ql}{2} + ql = \frac{ql}{2} \\ M_A = 0 & Y_C = \frac{-Pl + \frac{ql^2}{2} + Pl}{l} = \frac{ql}{2} \end{cases}$$

troviamo le caratteristiche della sollecitazione:

| TRAVE | TRATTO | $N_0$ | $T_0$ | $M_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $0\le x\le L$ | $-\frac{ql}{2}$ | 0 | 0 |
| 2 | $0\le x\le L$ | $-ql$ | $+\frac{ql}{2} - q\cdot x$ | $+\frac{ql}{2}\cdot x - qx\cdot\frac{x}{2}$ |

*Sistema 1*:
Equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \sum X = 0 & X_A + X_C = 0 \\ \sum Y = 0 & Y_A + Y_C = 0 \\ M_A = 0 & Y_C\cdot l - X_C\cdot l = 0 \end{cases}$$

per l'equazione ausiliaria, cerchiamo l'equilibrio dell'asta AB:

$$\begin{cases} \sum X = 0 & X_A + X_B = 0 \\ \sum Y = 0 & Y_A + Y_B = 0 \\ M_A = 0 & -X_B\cdot l + 1 = 0 \end{cases}$$

dove $Y_B = Y_C$ e $X_B = X_C$.
Risolvendo si ha:

$$\begin{cases} \sum X = 0 & X_A = -X_B = -\frac{1}{l} \\ \sum Y = 0 & Y_A + Y_B = 0 \\ M_A = 0 & X_B = \frac{1}{l} \end{cases}$$

riportiamo queste equazioni in quelle di equilibrio globale:

$$\begin{cases} & X_C = \frac{1}{l} \\ \sum X = 0 & X_A = -X_C = -\frac{1}{l} \\ \sum Y = 0 & Y_A = -Y_C = -\frac{1}{l} \\ M_A = 0 & Y_C = \frac{\frac{1}{l}\cdot l}{l} = \frac{1}{l} \end{cases}$$

troviamo le caratteristiche della sollecitazione:

| TRAVE | TRATTO | $N_1$ | $T_1$ | $M_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $0\le x\le L$ | $+\frac{1}{l}$ | $+\frac{1}{l}$ | $+\frac{1}{l}\cdot x$ |
| 2 | $0\le x\le L$ | $+\frac{1}{l}$ | $-\frac{1}{l}$ | $1-\frac{1}{l}\cdot x$ |

*Calcolo dei lavori virtuali*:
Sistema 0:

$$L_e^{1\to 0} = 1 \cdot \eta_{10} + Y_C^1 \cdot \left(-\frac{Y_C^0}{K_1}\right) = \eta_{10} + \frac{1}{l}\left(-\frac{\frac{ql}{2}}{K_1}\right) = \eta_{10} - \frac{q}{2K_1}$$

$$L_i^{1\to 0} =$$
$$\int_0^L (0)\,\frac{\left(+\frac{1}{l}\cdot x\right)}{EJ}dx + \int_0^L \left(+\frac{ql}{2}\cdot x - qx\cdot\frac{x}{2}\right)\frac{\left(1-\frac{1}{l}\cdot x\right)}{EJ}dx +$$
$$+\int_0^L \left(-\frac{ql}{2}\right)\frac{\left(+\frac{1}{l}\right)}{EA}dx + \int_0^L (-ql)\,\frac{\left(+\frac{1}{l}\right)}{EA}dx =$$
$$= 0 + \frac{\left(\frac{ql}{2}\cdot\frac{l^2}{2} - \frac{q}{2}\cdot\frac{l^3}{3} - \frac{q}{2}\frac{l^3}{3} + \frac{ql^4}{4}\frac{1}{2l}\right)}{EJ} +$$
$$-\frac{ql}{2EA} - \frac{ql}{EA} =$$
$$= \frac{\left(\frac{ql}{2}\cdot\frac{l^2}{2} - \frac{q}{2}\cdot\frac{l^3}{3} - \frac{q}{2}\frac{l^3}{3} + \frac{ql^4}{4}\frac{1}{2l}\right)}{EJ} - \frac{3ql}{2EA} =$$
$$= +\frac{ql^3}{24EJ} - \frac{3ql}{2EA}$$

dato che

$$L_e^{1\to 0} = L_i^{1\to 0}$$

si ottiene

$$\eta_{10} - \frac{q}{2K_1} = +\frac{ql^3}{24EJ} - \frac{3ql}{2EA}$$

$$\eta_{10} = +\frac{q}{2K_1} + \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{3ql}{2EA}$$

Sistema 1:

$$L_e^{1\to 1} = 1 \cdot \eta_{11} + Y_C^1\left(-\frac{Y_C^1}{K_1}\right) = \eta_{11} + \frac{1}{l}\left(-\frac{\frac{1}{l}}{K_1}\right) = \eta_{11} - \frac{1}{K_1 l^2}$$

$$L_i^{1\to 1} =$$
$$\int_0^L \frac{\left(+\frac{1}{l}\cdot x\right)^2}{EJ}dx + \int_0^L \frac{\left(1-\frac{1}{l}\cdot x\right)^2}{EJ}dx +$$
$$+\int_0^L \frac{\left(+\frac{1}{l}\right)^2}{EA}dx + \int_0^L \frac{\left(+\frac{1}{l}\right)^2}{EA}dx =$$
$$= \frac{\frac{1}{l^2}}{EJ}\frac{l^3}{3} + \frac{l + \frac{1}{l^2}\frac{l^3}{3} - \frac{2l^2}{2l}}{EJ} +$$
$$+\frac{\frac{1}{l^2}l}{EA} + \frac{\frac{1}{l^2}l}{EA} =$$
$$= \frac{l + 3l + l - 3l}{3EJ} + \frac{2}{lEA} =$$
$$= \frac{2l}{3EJ} + \frac{2}{lEA}$$

dato che

$$L_e^{1\to 1} = L_i^{1\to 1}$$

si ottiene

$$\eta_{11} - \frac{1}{K_1 l^2} = \frac{2l}{3EJ} + \frac{2}{lEA}$$

$$\eta_{11} = +\frac{1}{K_1 l^2} + \frac{2l}{3EJ} + \frac{2}{lEA}$$

per la compatibilità cinematica, si ricava l'incognita iperstatica $X$

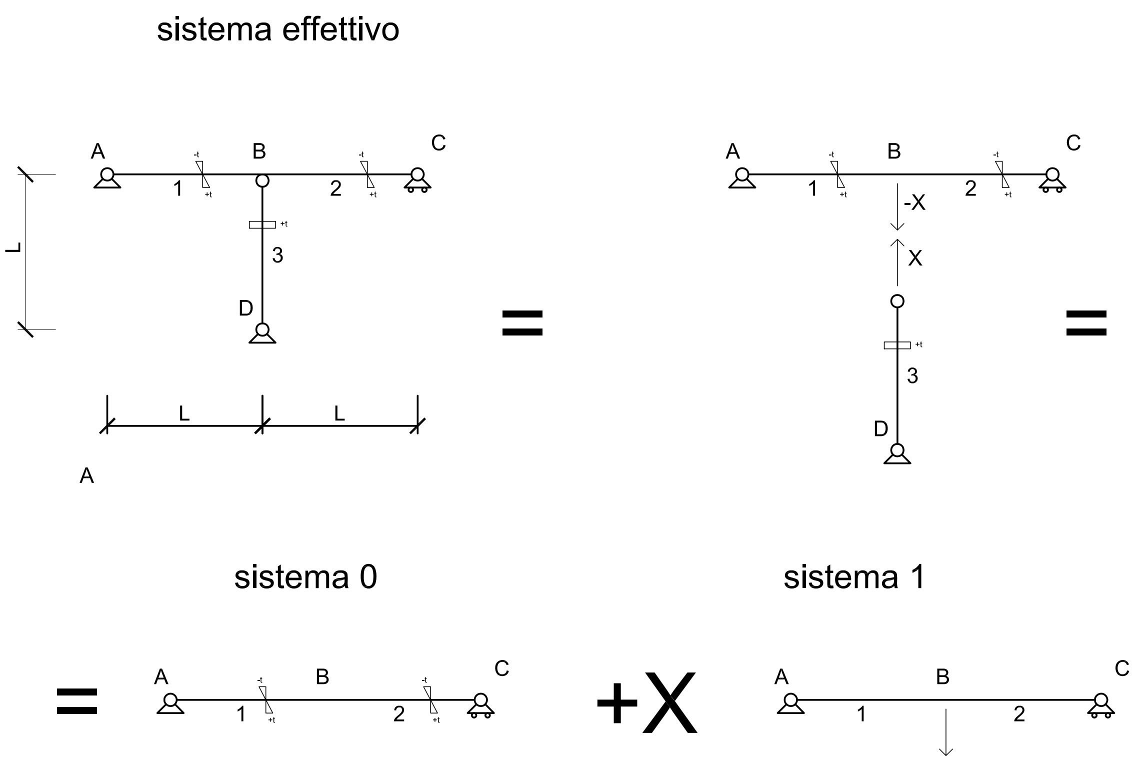
$$\eta_1 = \eta_{10} + X\eta_{11}$$

$$-\frac{X_1}{K_0} = \left(+\frac{q}{2K_1} + \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{3ql}{2EA}\right) + X\left(+\frac{1}{K_1 l^2} + \frac{2l}{3EJ} + \frac{2}{lEA}\right)$$

$$X = -\frac{+\frac{q}{2K_1} + \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{3ql}{2EA}}{\frac{1}{K_0} + \frac{1}{K_1 l^2} + \frac{2l}{3EJ} + \frac{2}{lEA}}$$

## Parte II

# Sistema una volta iperstatico e con variazioni termiche



Per il computo dei vincoli, si ha $2+2+1+2-2\cdot 3 = 1$ la struttura è 1 volta iperstatica. Come incognita iperstatica $X$ scegliamo lo sforzo normale nell'asta BD, togliendola. Lo spostamento generalizzato corrispondente nel sistema effettivo, privato dell'asta, sarà:

$$\eta_1 = -\frac{X}{EA}l - \alpha t l$$

le deformazioni causate dalle dilatazioni termiche sono:
$\chi^0_{AB} = \chi^0_{BC} = \frac{2\alpha t}{H}$
$\epsilon^0_{BD} = \alpha t$
Si scompone il sistema effettivo nella somma di due sottosistemi.

*Sistema 0*:
Il sistema 0 è isostatico e non ha forze applicate, quindi è scarico

*Sistema 1*:
Equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \sum X = 0 & X_A = 0 \\ \sum Y = 0 & Y_A + Y_C - 1 = 0 \\ M_A = 0 & Y_C \cdot 2l - 1 \cdot l = 0 \end{cases}$$

Risolvendo si ha:

$$\begin{cases} \sum X = 0 & X_A = 0 \\ \sum Y = 0 & Y_A = 1 - Y_C = \frac{1}{2} \\ M_A = 0 & Y_C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

troviamo le caratteristiche della sollecitazione:

| TRAVE | TRATTO | $N_1$ | $T_1$ | $M_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $0 \le x \le L$ | 0 | $+\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2} \cdot x$ |
| 2 | $0 \le \overline{x} \le L$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2} \cdot x$ |

*Calcolo dei lavori virtuali*:
Sistema 0:

$$L_e^{1\to 0} = 1 \cdot \eta_{10}$$

$$\begin{aligned} L_i^{1\to 0} &= \int_0^L M^1_{AB} \cdot \chi^0_{AB} dx + \int_0^L M^1_{BC} \cdot \chi^0_{BC} dx = \\ &= \int_0^L \left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{2\alpha t}{H}\right) dx + \int_0^L \left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{2\alpha t}{H}\right) dx = \\ &= \frac{\alpha t}{H}\frac{l^2}{2} + \frac{\alpha t}{H}\frac{l^2}{2} = \\ &= \frac{\alpha t}{H} l^2 \end{aligned}$$

dato che

$$L_e^{1\to 0} = L_i^{1\to 0}$$

si ottiene

$$\eta_{10} = \frac{\alpha t}{H} l^2$$

Sistema 1:

$$L_e^{1\to 1} = 1 \cdot \eta_{11}$$

$$L_i^{1\to 1} =$$
$$\int_0^L \frac{\left(+\frac{1}{2}\cdot x\right)^2}{EJ}dx + \int_0^L \frac{\left(+\frac{1}{2}\cdot x\right)^2}{EJ}dx =$$
$$= \frac{\frac{1}{4}}{EJ}\frac{l^3}{3} + \frac{\frac{1}{4}}{EJ}\frac{l^3}{3} =$$
$$= \frac{l^3}{6EJ}$$

dato che

$$L_e^{1\to 1} = L_i^{1\to 1}$$

si ottiene

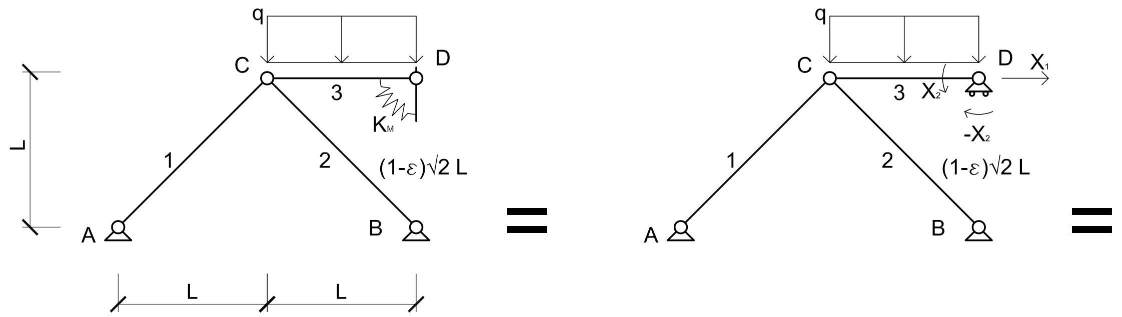
$$\eta_{11} = \frac{l^3}{6EJ}$$

per la compatibilità cinematica, si ricava l'incognita iperstatica $X$

$$\eta_1 = \eta_{10} + X\eta_{11}$$
$$-\frac{X}{EA}l - \alpha tl = \left(\frac{\alpha t}{H}l^2\right) + X\left(\frac{l^3}{6EJ}\right)$$
$$X = -\frac{\alpha tl + \frac{\alpha t}{H}l^2}{\frac{l}{EA} + \frac{l^3}{6EJ}}$$

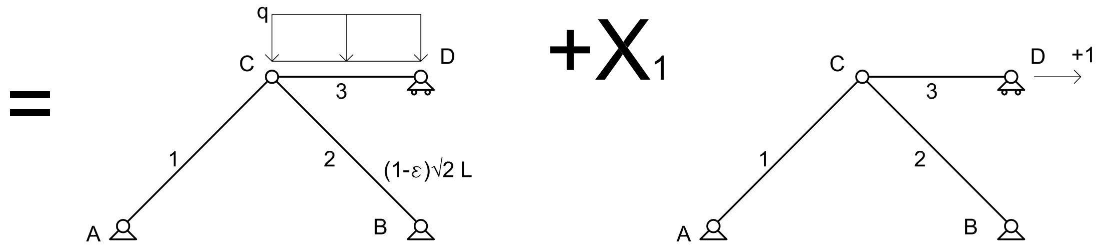
# Sistema due volte iperstatico e con difetto di lunghezza

sistema effettivo

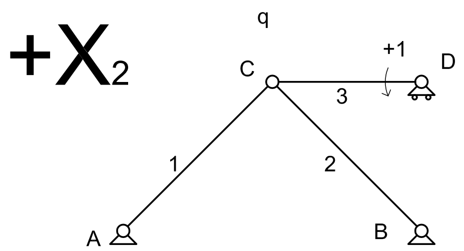



sistema 0

sistema 1




sistema 2



Per il computo dei vincoli, si ha $2+2+2\cdot 2+2+1-3\cdot 3=2$ la struttura è 2 volta iperstatica. Come incognita iperstatica $X_1$ scegliamo la rezione orizzontale in $D$ e come incognita iperstatica $X_2$ la reazione della molla. Gli spostamenti generalizzati corrispondenti nel sistema effettivo valgono:

$$\eta_1 = 0$$

$$\eta_2 = -\frac{X_2}{K_m}$$

Si scompone il sistema effettivo nella somma di tre sottosistemi e se ne trovano le caratteristiche della sollecitazione

| TRAVE | TRATTO | N | | | T | | | M | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | $0 \le x \le \sqrt{2}L$ | $-\frac{pl}{2\sqrt{2}}$ | $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{l\sqrt{2}}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | $0 \le x \le \sqrt{2}L$ | $-\frac{pl}{2\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{l\sqrt{2}}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | $0 \le x \le L$ | 0 | $+1$ | 0 | $+\frac{pl}{2}-px$ | 0 | $+\frac{1}{l}$ | $+\frac{plx}{2}-p\frac{x^2}{2}$ | 0 | $+\frac{1}{l}x$ |

*Calcolo dei lavori virtuali*:
Sistema $1 \to 0$:

$$L_e^{1\to 0} = 1\cdot \eta_{10}$$

$$L_i^{1\to 0} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}L} \left(-\frac{pl}{2\sqrt{2}}\right)\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{EA}dx + \int_0^{\sqrt{2}L} \left(-\frac{pl}{2\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{EA}dx - \epsilon\sqrt{2}l\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}l}\right) =$$

$$= -\epsilon$$

dato che

$$L_e^{1\to 0} = L_i^{1\to 0}$$

si ottiene

$$\eta_{10} = -\epsilon$$

Sistema $1 \to 1$:

$$L_e^{1\to 1} = 1\cdot \eta_{11}$$

$$L_i^{1\to 1} =$$

$$\int_0^{\sqrt{2}L} \frac{\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{EA}dx + \int_0^{\sqrt{2}L} \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{EA}dx + \int_0^{L} \frac{(+1)^2}{EA}dx =$$

$$= +\frac{\sqrt{2}l}{2EA} + \frac{\sqrt{2}l}{2EA} + \frac{l}{EA} =$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)l}{EA}$$

dato che

$$L_e^{1\to 1} = L_i^{1\to 1}$$

si ottiene

$$\eta_{11} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)l}{EA}$$

Sistema $2 \to 0$:

$$L_e^{2\to 0} = 1 \cdot \eta_{20}$$

$$L_i^{2\to 0} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(-\frac{pl}{2\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}l}\right) \cdot \frac{1}{EA} dx + \int_0^{\sqrt{2}} \left(-\frac{pl}{2\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}l}\right) \cdot \frac{1}{EA} dx + \int_0^{L} \left(\frac{plx}{2} - p\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{l}x\right) \cdot \frac{1}{EJ} dx - \epsilon\sqrt{2}l \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= +\frac{p}{4EA}\sqrt{2}l + \frac{p}{4EA}\sqrt{2}l + \frac{pl^3}{6EJ} - \frac{pl^3}{8EJ} - \frac{\epsilon\sqrt{2}l}{\sqrt{2}l} =$$

$$= +\frac{p}{2EA}\sqrt{2}l + \frac{pl^3}{24EJ} - \epsilon$$

dato che

$$L_e^{2\to 0} = L_i^{2\to 0}$$

si ottiene

$$\eta_{20} = +\frac{p}{2EA}\sqrt{2}l + \frac{pl^3}{24EJ} - \epsilon$$

Sistema $2 \to 2$:

$$L_e^{2\to 2} = 1 \cdot \eta_{22}$$

$$L_i^{2\to 2} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}L} \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}l}\right)^2}{EA} dx + \int_0^{\sqrt{2}L} \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}l}\right)^2}{EA} dx + \int_0^{L} \frac{\left(\frac{1}{l}x\right)^2}{EJ} dx =$$

$$= +\frac{1}{2EAl^2}\sqrt{2}l + \frac{1}{2EAl^2}\sqrt{2}l + \frac{1}{EJl^2}\frac{l^3}{3} =$$

$$= +\frac{1}{EA}\frac{\sqrt{2}}{l} + \frac{l}{3EJ}$$

dato che

$$L_e^{2\to 2} = L_i^{2\to 2}$$

si ottiene

$$\eta_{22} = +\frac{1}{EA}\frac{\sqrt{2}}{l} + \frac{l}{3EJ}$$

Sistema $2 \to 1$ e $1 \to 2$:

$$\eta_{12} = \eta_{21}$$

$$L_e^{2\to 1} = 1 \cdot \eta_{21}$$

$$L_i^{2\to 0} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}L} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}l}\right) \cdot \frac{1}{EA} dx + \int_0^{\sqrt{2}L} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}l}\right) \cdot \frac{1}{EA} dx =$$

$$= -\frac{1}{2EAl}\sqrt{2}l + \frac{1}{2EAl}\sqrt{2}l = 0$$

dato che

$$L_e^{2\to 1} = L_i^{2\to 1}$$

si ottiene

$$\eta_{21} = 0$$

Per la compatibilità cinematica, si ricavano le incognite iperstatiche $X_1$ e $X_2$:

$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_{10} + X_1\eta_{11} + X_2\eta_{12} \\ \eta_2 = \eta_{20} + X_1\eta_{21} + X_2\eta_{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = (-\epsilon) + X_1 \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{2})l}{EA}\right) + X_2 \cdot 0 \\ \frac{-X_2}{K_m} = \left(+\frac{p}{2EA}\sqrt{2}l + \frac{pl^3}{24EJ} - \epsilon\right) + X_1 \cdot 0 + X_2 \left(+\frac{1}{EA}\frac{\sqrt{2}}{l} + \frac{l}{3EJ}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\epsilon}{\frac{(1+\sqrt{2})l}{EA}} \\ X_2 = -\frac{+\frac{p}{2EA}\sqrt{2}l + \frac{pl^3}{24EJ} - \epsilon}{\frac{1}{Km} + \frac{1}{EA}\frac{\sqrt{2}}{l} + \frac{l}{3EJ}} \end{cases}$$

*(Soluzione a cura di Lorenzo Greco)*