UNIVERSITÀ DI PISA – Facoltà di Ingegneria

Scienza delle Costruzioni (CdLM in Ingegneria Edile – Architettura)

A.A. 2011/2012

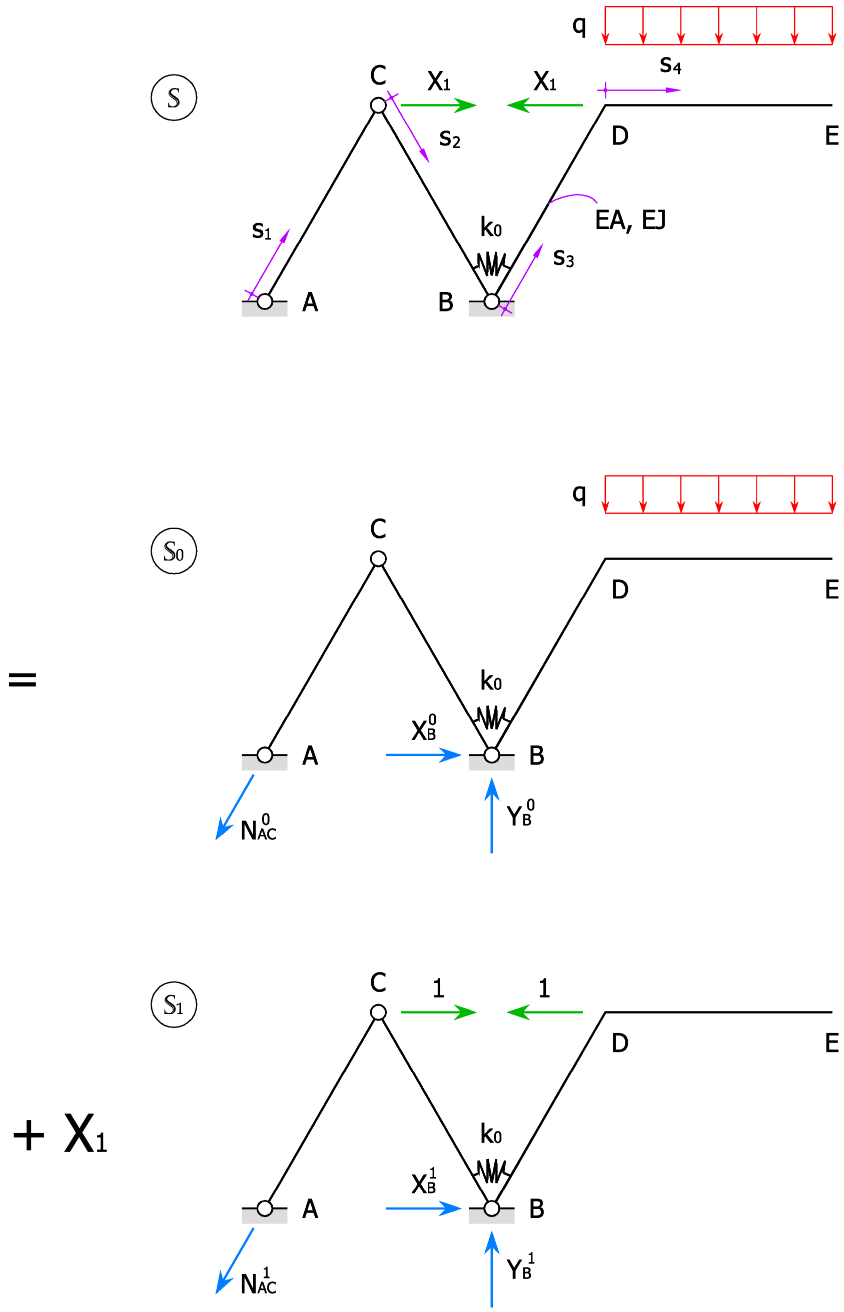
Docenti: Salvatore Sergio LIGARÒ & Paolo Sebastiano VALVO

Web: www.dic.unipi.it/paolovalvo/sdc_edarch.html

Prova scritta del 16 luglio 2012 – Soluzione

Problema A

Si risolve il problema col metodo delle forze, scegliendo come incognita iperstatica X_1 la forza normale nell'asta CD. Pertanto, il sistema $\mathcal{S}$, equivalente a quello effettivo, è decomposto nella somma del sistema $\mathcal{S}_0$, in cui agiscono le azioni esterne, e del sistema $\mathcal{S}_1$, in cui agisce l'incognita iperstatica assunta unitaria, moltiplicato per il valore X_1 dell'incognita iperstatica stessa.



Sistema $\mathcal{S}_0$

Mediante le equazioni di equilibrio statico, si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione nel sistema $\mathcal{S}_0$. Le reazioni vincolari risultano

$$N_{AC}^0 = \frac{4\sqrt{3}}{3}qa, \quad X_B^0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}qa, \quad Y_B^0 = 4qa.$$

Le caratteristiche della sollecitazione hanno le espressioni riportate nella tabella seguente.

Trave n.	Estremi IJ	Ascissa	Forza normale N_{IJ}^0	Forza di taglio T_{IJ}^0	Momento flettente M_{IJ}^0
1	AC	$0 \le s_1 \le 2a$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}qa$	0	0
2	CB	$0 \le s_2 \le 2a$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}qa$	$-2qa$	$-2qas_2$
3	BD	$0 \le s_3 \le 2a$	$-\sqrt{3}qa$	qa	$qas_3 - 4qa^2$
4	DE	$0 \le s_4 \le 2a$	0	$2qa - qs_4$	$-2qa^2 + 2qas_4 - \frac{1}{2}qs_4^2$

La coppia trasmessa dalla molla in B risulta

$$M_B^0 = M_{CB}^0(2a) = -4qa^2.$$

Sistema $\mathcal{S}_1$

Analogamente, imponendo l'equilibrio statico nel sistema $\mathcal{S}_1$, si trovano le reazioni vincolari

$$N_{AC}^1 = 0, \quad X_B^1 = 0, \quad Y_B^1 = 0;$$

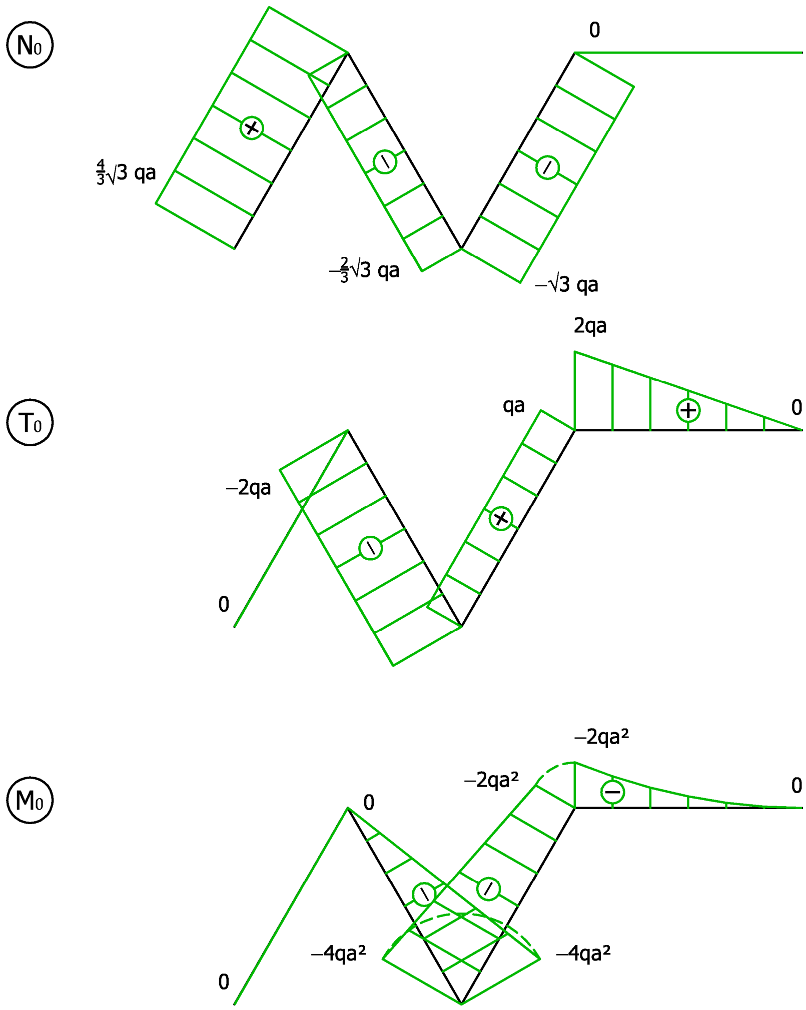
Le caratteristiche della sollecitazione hanno le espressioni riportate nella tabella seguente.

Trave n.	Estremi IJ	Ascissa	Forza normale N_{IJ}^0	Forza di taglio T_{IJ}^0	Momento flettente M_{IJ}^0
1	AC	$0 \le s_1 \le 2a$	0	0	0
2	CB	$0 \le s_2 \le 2a$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}s_2$
3	BD	$0 \le s_3 \le 2a$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}a - \frac{\sqrt{3}}{2}s_3$
4	DE	$0 \le s_4 \le 2a$	0	0	0

La coppia trasmessa dalla molla in B risulta

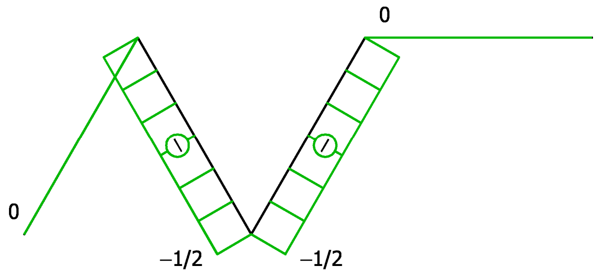
$$M_B^1 = M_{CB}^1(2a) = \sqrt{3}a.$$

Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione nel sistema S_0

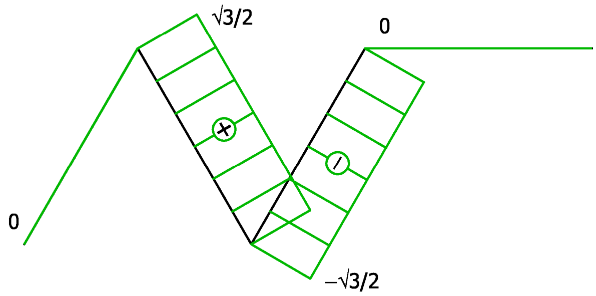


Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione nel sistema S_1

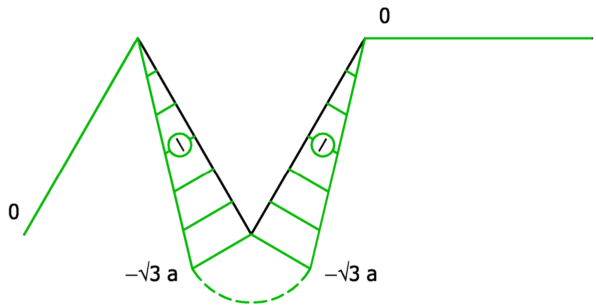
N_1



T_1



M_1



Determinazione dell'incognita iperstatica

Per il sistema in esame, l'equazione di Müller-Breslau risulta

$$\eta_1 = \eta_{10} + X_1 \eta_{11}\,,$$

dove

$$\eta_1 = -2\frac{a}{EA}X_1\,.$$

Applicando il Teorema dei lavori virtuali,

$$\mathcal{L}_e^{1\to 0} = 1\cdot\eta_{10} = \mathcal{L}_i^{1\to 0} = \int_\Omega (N_{IJ}^1\,\varepsilon_{IJ}^0 + M_{IJ}^1\,\kappa_{IJ}^0)\,ds + M_B^1\Delta\theta_B^0 = \int_\Omega (N_{IJ}^1\frac{N_{IJ}^0}{EA} + M_{IJ}^1\frac{M_{IJ}^0}{EJ})\,ds + M_B^1\frac{M_B^0}{k_0}\,,$$

$$\mathcal{L}_e^{1\to 1} = 1\cdot\eta_{11} = \mathcal{L}_i^{1\to 1} = \int_\Omega (N_{IJ}^1\,\varepsilon_{IJ}^1 + M_{IJ}^1\,\kappa_{IJ}^1)\,ds + M_B^1\Delta\theta_B^1 = \int_\Omega (N_{IJ}^1\frac{N_{IJ}^1}{EA} + M_{IJ}^1\frac{M_{IJ}^1}{EJ})\,ds + M_B^1\frac{M_B^1}{k_0}\,;$$

si calcolano i valori degli altri coefficienti,

$$\eta_{10} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\frac{qa^2}{EA} - 6\sqrt{3}\frac{qa^4}{EJ} - 4\sqrt{3}\frac{qa^3}{k_0} = -\frac{25\sqrt{3}}{3}\frac{qa^4}{EJ}\,;$$

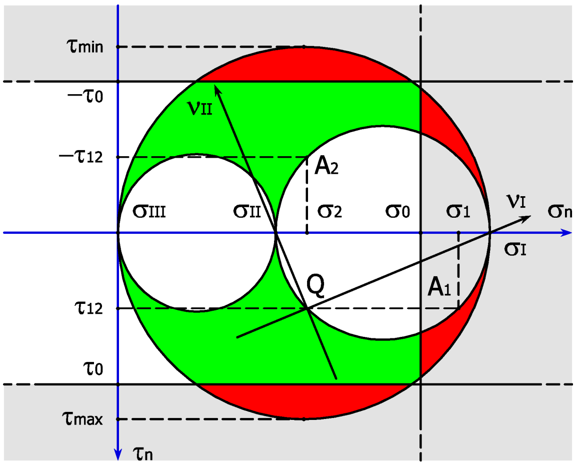
$$\eta_{11} = \frac{a}{EA} + 4\frac{a^3}{EJ} + 3\frac{a^2}{k_0} = 8\frac{a^3}{EJ}\,.$$

Infine, si determina il valore dell'incognita iperstatica

$$X_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6}qa\,.$$

Problema B

La figura seguente mostra la rappresentazione grafica dello stato di tensione **T** nel piano di Mohr.



Tensioni principali:

$$\sigma_I = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}) + \tau_{12}^2} = 70 + 20\sqrt{2} \cong 98.3 \text{ MPa} > \sigma_0 = 80 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}) + \tau_{12}^2} = 70 - 20\sqrt{2} \cong 41.7 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{III} = 0 \text{ MPa}.$$

Tensione tangenziale massima:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \cong 49.1 \text{ MPa} > \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 40 \text{ MPa}.$$

Non è verificato né il criterio di Galilei, né quello di Tresca.