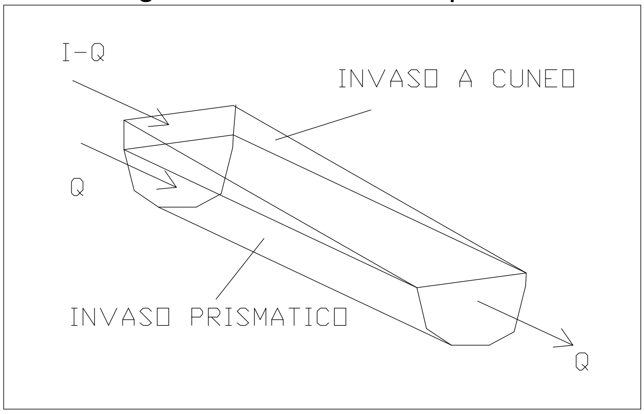
METODO DI MUSKINGUM-CUNGE

E’ un modello del 1938 che prende il nome dal fiume in cui è stato applicato la prima volta. Alla base del modello ci sono le ipotesi che il volume d’acqua invasato nel tronco d’alveo sia somma di due parti: la prima costituita dal volume del solido compreso tra il contorno dell’alveo ed il piano passante per il pelo libero della sezione di valle e parallelo al fondo (invaso prismatico). La seconda parte è costituita dal volume del solido compreso tra il piano parallelo al fondo ed il profilo del pelo libero (invaso a cuneo). Questa seconda parte è positiva nella prima fase dell’onda di piena, quando la pendenza del pelo libero è superiore a quella di fondo, e negativa nella seconda quando è inferiore.



Il volume della prima parte può essere assunto, ipotizzando le altezze liquide proporzionali alle portate, pari alla portata in uscita Q moltiplicata per un certo coefficiente K di proporzionalità mentre quella della seconda parte (che può essere assunta pari ad un cono è pari a) Kx(I-Q) dove I è la portata in ingresso ed x un fattore di peso variabile tra 0 e 0.5.

Il volume totale immagazzinato all’istante t è quindi dato da:

$$S(t) = KQ + Kx(I - Q) = K\left[xI + (1 - x)Q\right]$$

L’incremento di invaso in un intervallo di tempo Δt è dato da:

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) =$$

$$K\left\{\left[xI(t + \Delta t) + (1 - x)Q(t + \Delta t)\right] - \left[xI(t) + (1 - x)Q(t)\right]\right\}$$

Assegnando alle portate in ingresso ed in uscita il valore medio tra quelli assunti all’inizio ed alla fine dell’intervallo:

$$\Delta S = \frac{I(t + \Delta t) + I(t)}{2}\Delta t - \frac{Q(t + \Delta t) + Q(t)}{2}\Delta t$$

ed effettuando alcune semplificazioni si ottiene:

$$Q(t + \Delta t) = C_1 I(t + \Delta t) + C_2 I(t) + C_3 Q(t)$$

dove

$$C_1 = \frac{Kx + 0.5\Delta t}{K(1 - x) + 0.5\Delta t}$$

$$C_2 = \frac{0.5\Delta t - Kx}{K(1 - x) + 0.5\Delta t}$$

$$C = \frac{K(1 - x) - 0.5\Delta t}{K(1 - x) + 0.5\Delta t}$$

Da notare che C_1+C_2+C_3=1

Le due costanti K ed x si possono stimare con un procedimento di taratura, se sono a disposizione idrogrammi di ingresso ed uscita di eventi reali. Assumendo valori diversi di x, si determinano i valori di K mediante l’espressione:

$$K = \frac{0.5\Delta t\left[I(t+\Delta t)+I(t)\right]-\left[Q(t+\Delta t)+Q(t)\right]}{x\left[I(t+\Delta t)+I(t)\right]+(1-x)\left[Q(t+\Delta t)+Q(t)\right]}$$

I valori calcolati del numeratore e del denominatore sopra vengono determinati per ogni intervallo degli idrogrammi noti e vengono riportati in un grafico che ha la forma di un circuito chiuso. Il valore di x che determina una curva più simile ad una retta può essere considerato come il valore corretto per il dato corso d'acqua. Il valore di K viene trovato di conseguenza come pendenza della retta così ottenuta. Il valore k rappresenta il tempo impiegato dall'onda a percorrere il tronco del corso d'acqua, e quindi può anche essere stimato come il tempo osservato che impiega il picco per attraversare il corso d'acqua.
Se non sono disponibili idrogrammi di piena è possibile stimare i coefficienti K ed x mediante il metodo di Muskingum-Cunge. Cunge (1969) dimostrò che quando K e Δt sono assunti come costanti, rappresentano una approssimazione dell'equazione dell'onda cinematica, ed in particolare dell'equazione di diffusione del momento.

Definita con c_k la celerità corrispondente a Q e B $\left(c_k = \frac{dQ}{dA} = \frac{dx}{dt}\right)$dove B è la larghezza dell'alveo in superficie, si ricava:

$$K = \frac{\Delta x}{c_k} = \frac{\Delta x}{dQ/dA}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{Q}{Bc_k S_0 \Delta x}\right)$$

ESEMPIO

Determinare il deflusso di un corso d'acqua avente K=2.3 h, x=0.15 h e Δt=1 h, a partire dall'afflusso riportato nelle prime due colonne della figura che segue. Sia il deflusso iniziale pari a 85 m^3/s.

t(h)	I(m^3/s)	C_1I(t+Δt)	C_2I(t)	C_3Q(t+Δt)	Q(m^3/s)
		C_1= 0.063	C_2= 0.344	C_3= 0.593	
1	93				85.000
2	137	8.650	32.010	50.377	91.037
3	208	13.132	47.155	53.955	114.242
4	320	20.204	71.593	67.707	159.504
5	442	27.906	110.143	94.533	232.582
6	546	34.473	152.134	137.844	324.451
7	630	39.776	187.931	192.292	419.998
8	678	42.807	216.843	248.920	508.569
9	691	43.627	233.365	301.413	578.405
10	675	42.617	237.839	342.802	623.258
11	634	40.029	232.332	369.385	641.746
12	571	36.051	218.220	380.342	634.613
13	477	30.116	196.536	376.115	602.767
14	390	24.623	164.181	357.240	546.045
15	329	20.772	134.236	323.623	478.632
16	247	15.595	113.240	283.670	412.505
17	184	11.617	85.016	244.478	341.112
18	134	8.460	63.332	202.166	273.958
19	108	6.819	46.122	162.366	215.307
20	90	5.682	37.173	127.606	170.461

Si determinano inizialmente i valori delle costanti:

$$C_1 = \frac{Kx + 0.5\Delta t}{K(1-x) + 0.5\Delta t} = \frac{2.3 \cdot 0.15 + 0.5 \cdot 1}{2.3(1-0.15) + 0.5 \cdot 1} = \frac{0.31}{4\ 91} = 0.0631$$

$$C_2 = \frac{0.5\Delta t - Kx}{K(1-x) + 0.5\Delta t} = \frac{0.5 \cdot 1 - 2.3 \cdot 01.5}{2.3(1-0.15) + 0.5 \cdot 1} = \frac{1.69}{4.91} = 0.3442$$

$$C\ = \frac{K(1-x) - 0.5\Delta t}{K(1-x) + 0.5\Delta t} = \frac{2.3(1-0.15) - 0.5 \cdot 1}{2.3(1-0.15) + 0.5 \cdot 1} = \frac{2.91}{4\ 91} = 0.5297$$

Si deve verificare che $C_1+C_2+C_3=1$

Per il primo intervallo di tempo si ha

$$Q(2) = C_1 I(2) + C_2 I(1) + C_3 Q(1) =$$
$$0.0631 \cdot 137 + 0.3442 \cdot 93 + 0.5297 \cdot 85 = 91$$

In maniera analoga si procede per gli altri intervalli.

ESEMPIO

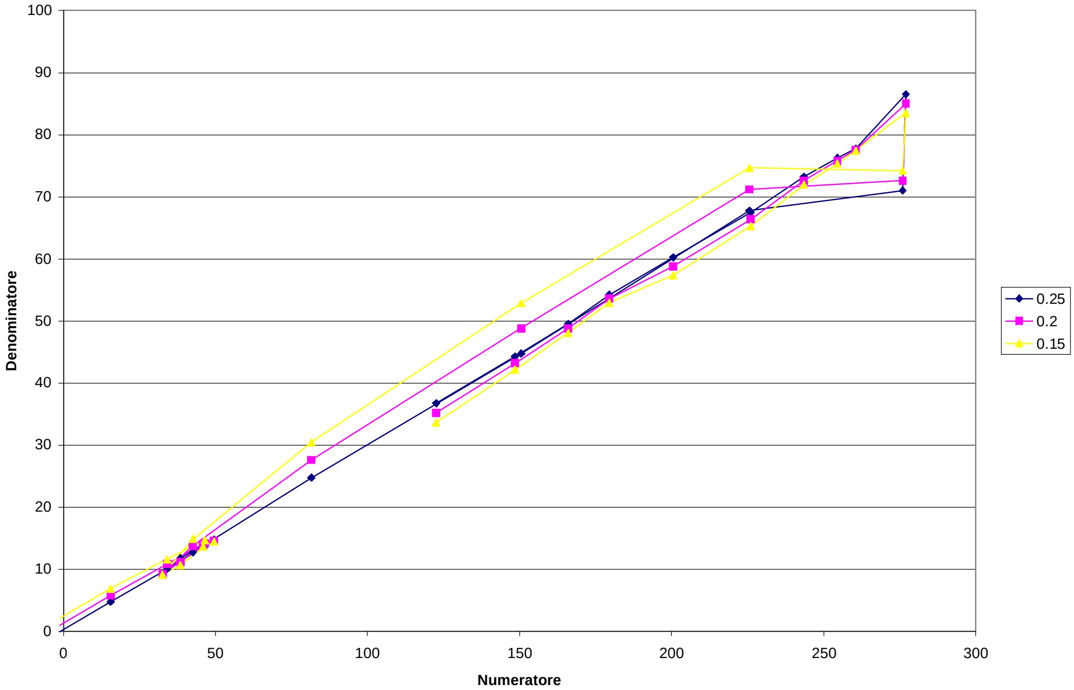
Dato gli idrogrammi di piena in ingresso ed in uscita riportati in uscita, determinare i valori dei coefficienti K ed x del metodo di Muskingum.

t (h)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
I (m^3/s)	0	60	120	180	240	300	364	446	530	613	696
Q (m^3/s)	0	0	13	42	81	127	178	231	293	363	437
t (h)	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63
I (m^3/s)	776	885	932	948	932	914	911	921	941	958	975
Q (m^3/s)	514	593	672	757	822	861	879	888	897	910	924
t (h)	66	69	72	75	78	81	84	87	90	93	96
I (m^3/s)	982	980	969	951	925	890	852	810	767	717	668
Q (m^3/s)	940	954	964	968	965	956	938	919	884	851	812
t (h)	99	102	105	108	111	114	117	120	123	126	129
I (m^3/s)	618	566	514	462	410	359	309	261	248	238	229
Q (m^3/s)	769	725	677	629	579	528	478	427	373	332	302
t (h)	132	135	138	141	144	147					
I (m^3/s)	222	216	210	205	199	194					
Q (m^3/s)	278	260	246	235	225	217					

Si applica l'espressione

$$K = \frac{0.5\Delta t\left[I(t+\Delta t) + I(t)\right] - \left[Q(t+\Delta t) + Q(t)\right]}{x\left[I(t+\Delta t) + I(t)\right] + (1-x)\left[Q(t+\Delta t) + Q(t)\right]}$$

fissando valori differenti di x. Si riportato i valori del numeratore e del denominatore per i vari intervalli di tempo in un grafico raccordano i punti con una linea chiusa. Successivamente si valuta quale è il valore di x che determina una curva chiusa più vicina ad una retta. In questo caso si vede che fissando x=0.15,0.2 e 0.25 il valore ottimo è quest'ultimo. L'equazione della retta interpolante è data da y = 0.2973x - 0.1341 cui corrisponde una pendenza pari a m=1/0.2973=3.36. Questo valore è anche quello del coefficiente k di taratura. Si pone quindi per applicare il metodo di Muskingum al tratto in esame x=0.25 ed k=3.3 h


Denominatore
Numeratore
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
50
100
150
200
250
300
0.25
0.2
0.15

DETERMINAZIONE DEL PROFILO DELL'ONDA DI PIENA IN USCITA DA UN SERBATOIO DI LAMINAZIONE

Un serbatoio di laminazione per le piene presenta una relazione altezza-invaso del serbatoio espresso dalla relazione $V = 6 \cdot 10^{-9} \cdot H^{19.072}$ L'andamento dell'onda di piena in arrivo è data da:

t(h)	0	0.15	0.3	0.45	1	1.15	1.3	1.45	2
I(m^3/s)	0	0.04	0.12	0.25	0.53	1.1	3	6.12	8.24
t(h)	2.15	2.3	2.45	3	3.15	3.3	3.45	4	4.15
I(m^3/s)	9.06	9.2	8.75	8.07	7.36	6.66	5.98	5.32	4.67
t(h)	4.3	4.45	5	5.15	5.3	5.45	6		
I(m^3/s)	4.11	3.65	3.29	3	2.73	2.49	2.27		

Il serbatoio è datato di uno sfioratore di superficie posto a quota $H = 3.15$ avente larghezza pari a L=2.3 m.

Supporre inizialmente il serbatoio con il livello liquido posto a quota 3.15 m.

L'andamento della portata sfiorata con l'altezza è data da

$$Q = 0.385 \cdot L \cdot (H - 3.15)^{1.5} \sqrt{2g}$$

Applicando la discretizzazione dell'equazione di continuità tra l'intervallo t e quello t+Δt si ricava:

$$S(t + \Delta t) = \frac{I(t) + I(t + \Delta t)}{2} \Delta t - \frac{Q(t) + Q(t + \Delta t)}{2} \Delta t$$

I valori delle portate ingresso sono noti nei vari intervalli. I valori di Q ed I sono noti all'intervallo di tempo t, ma sono incogniti i valori a t+Δt. Riscrivendo l'equazione sopra in termine delle due incognite sopra si ha:

$$\frac{2V(t + \Delta t)}{\Delta t} + Q(t + \Delta t) = I(t) + I(t + \Delta t) + \left(\frac{2V(t)}{\Delta t} - Q(t) \right)$$

La funzione che lega V(t+Δt) e Q(t+Δt) è determinabile a partire dalla relazione che lega la portata con l'altezza a sua volta legata al volume di invaso. Oltre a questa relazione per l'intervallo di tempo Δt fissato (in questo caso 15 min corrispondenti a 900 s) si determina il valore della funzione $\frac{2V}{\Delta t} + Q$. La tabella riassuntiva è la seguente.

H (m)	V(m^3)	Q(m^3/s)	2S/Δt+Q
3.15	19	0	0.04
3.3	46	0.2	0.33
3.45	109	0.6	0.89
3.6	244	1.2	1.73
3.75	532	1.8	3.01
3.9	1124	2.5	5.05
4.05	2310	3.3	8.48
4.08	2659	3.5	9.43
4.15	3678	3.9	12.09
4.2	4621	4.2	14.49
4.27	6334	4.6	18.72
4.35	9024	5.2	25.21
4.5	17227	6.2	44.44

Con questa relazione ed in particolare con il legame tra $Q(t)$ e $\frac{2V(t)}{\Delta t} + Q(t)$ è possibile determinare il valore corrispondente di Q(t+Δt), effettuando una interpolazione lineare.

Nell'esercizio per il primo intervallo di tempo si ha I(0)=Q(0)=0 mentre S(0)=19 m^3. Pertanto $\frac{2V(0)}{\Delta t} - Q(0) = 0.042$.

La portata all'intervallo di tempo t=0.15 è data da

$$\frac{2V(0.15)}{\Delta t} + Q(0.15) = I(0) + I(0.15) + \left(\frac{2V(0)}{\Delta t} - Q(0) \right)$$

$$\frac{2V(0.15)}{\Delta t} + Q(0.15) = 0 + 0.04 + 0.042 = 0.082$$

Il valore di Q(0.15) si trova per interpolazione lineare noto il valore di $\frac{2V(0.15)}{\Delta t} + Q(0.15)$ ed il legame funzionale tra Q e $\frac{2V}{\Delta t} + Q$

In questo caso si ha infatti:

per t=0 $\frac{2V(0)}{\Delta t} + Q(0) = 0.042$ e Q(0)=0

per t=0.15 $\frac{2V(0.15)}{\Delta t} + Q(0.15) = 0.082$ e Q(0.15)= incognita.

E' noto però che per Q=0.2 $\frac{2V}{\Delta t} + Q = 0.33$

Interpolando linearmente di ha $Q(0.3) = 0. + \frac{(0.2 - 0)}{0.33 - 0.042}(0.082 - 0.042) = 0.03$ m^3/s

A questo punto si procede con il secondo intervallo

$$\frac{2V(0.3)}{\Delta t} + Q(0.3) = I(0.15) + I(0.3) + \left(\frac{2V(0.15)}{\Delta t} - Q(0.15) \right)$$

$$\frac{2V(0.3)}{\Delta t} + Q(0.3) = 0.04 + 0.12 + 0.0266 = 0.1866$$

Interpolando di nuovo linearmente si ricava

$Q(0.3) = 0.0277 + \frac{(0.2 - 0)}{0.33 - 0.042}(0.1866 - 0.042) = 0.1$ m^3/s

Si procede così individuando gli altri valori ed ottenendo la tabella ed il grafico che seguono.

t	I	I(t)+I(t+Δt)	2S/Δt-Q	2S/Δt+Q	Q
1.00 AM	0		0.04		
1.15 AM	0.04	0.04	0.02	0.08	0.03
1.30 AM	0.12	0.16	-0.04	0.18	0.11
1.45 AM	0.25	0.37	-0.13	0.33	0.23
2.00 AM	0.53	0.78	-0.29	0.65	0.47
2.15 AM	1.1	1.63	-0.53	1.34	0.94
2.30 AM	3	4.1	-0.48	3.57	2.02
2.45 AM	6.12	9.12	1.89	8.64	3.38
3.00 AM	8.24	14.36	7.45	16.25	4.40
3.15 AM	9.06	17.3	14.51	24.75	5.12
3.30 AM	9.2	18.26	21.68	32.77	5.55
3.45 AM	8.75	17.95	27.82	39.63	5.90
4.00 AM	8.07	16.82	32.32	44.64	6.16
4.15 AM	7.36	15.43	35.10	47.75	6.32
4.30 AM	6.66	14.02	36.33	49.12	6.39
4.45 AM	5.98	12.64	36.20	48.97	6.39
5.00 AM	5.32	11.3	34.88	47.50	6.31
5.15 AM	4.67	9.99	32.52	44.87	6.17
5.30 AM	4.11	8.78	29.33	41.30	5.99
5.45 AM	3.65	7.76	25.55	37.09	5.77
6.00 AM	3.29	6.94	21.42	32.49	5.53
6.15 AM	3	6.29	17.14	27.71	5.28
6.30 AM	2.73	5.73	12.92	22.87	4.97
6.45 AM	2.49	5.22	8.96	18.14	4.59
7.00 AM	2.27	4.76	5.47	13.72	4.13