

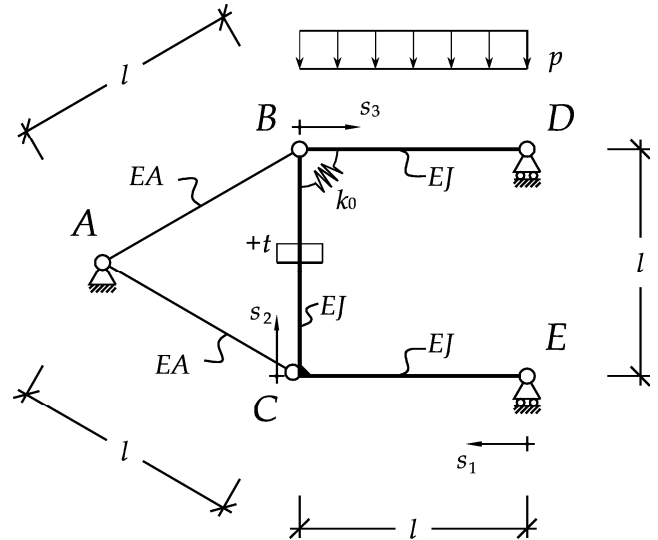
Università di Pisa  
 Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI  
 Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale  
 Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Elementi della soluzione della prova scritta del 16 settembre 2013 – Parte I

**Problema.** Nel sistema di figura le travi BC, BF, CG e FG sono flessibili ed inestensibili, mentre le travi AB, AC, FH e GH sono estensibili. Nei tratti BD e DE della trave BF sono applicati dei carichi distribuiti trasversali costanti, di intensità  $p$  per unità di lunghezza; sulle travi BC e FG agiscono, invece, variazioni termiche, costanti nello spessore della trave... [vedi il testo completo della prova].

È facile provare che il sistema è antisimmetrico rispetto all'asse verticale passante per le sezioni D ed E. È così possibile limitare lo studio alla sola parte ABCDE, ponendo sia in D, sia in E un vincolo opportuno (carrello con piano di scorrimento ortogonale all'asse DE).



- 1) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti BC, BD e CE che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti:

$$EJv_1^{IV}(s_1) = 0;$$

$$EJv_2^{IV}(s_2) = 0;$$

$$EJv_3^{IV}(s_3) = p;$$

$$1. \quad v_1(0) = 0;$$

$$2. \quad -EJv_1''(0) = 0;$$

$$3. \quad v_1^I(l) = v_2^I(0);$$

$$4. \quad -EJv_1''(l) = -EJv_2''(0);$$

$$5. \quad -EJv_2''(l) = -EJv_3''(0);$$

$$6. \quad -EJv_2''(l) = k_0 [v_2^I(l) - v_3^I(0)];$$

$$7. \quad v_1(l) + v_3(0) = -\alpha t l;$$

$$8. \quad v_3(l) = 0;$$

$$9. \quad -EJv_3''(l) = 0;$$

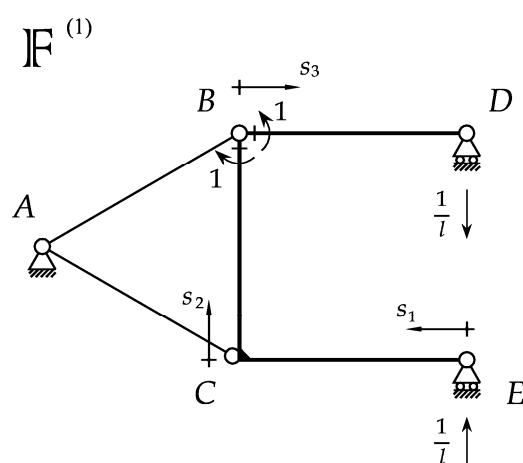
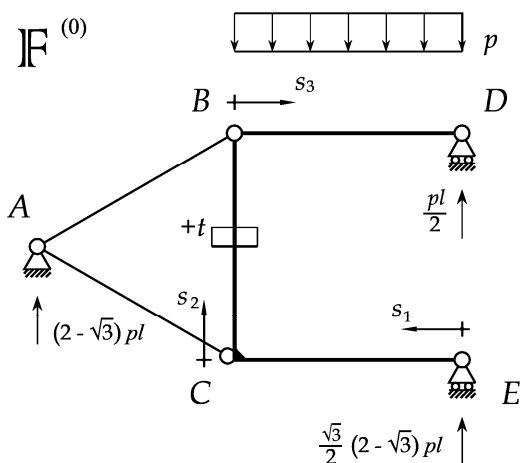
$$10. \quad -EJv_2'''(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{EA}{2l} \underbrace{[\sqrt{3}v_2(0) - v_1(l)]}_{N_{AC}};$$

$$11. \quad -EJv_2'''(l) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{EA}{2l} \underbrace{[\sqrt{3}v_2(l) - v_3(0)]}_{N_{AB}};$$

$$12. \quad -EJv_1'''(l) - EJv_3'''(0) + \frac{EA}{4l} [v_1(l) + \sqrt{3}v_2(l) - \sqrt{3}v_2(0) - v_3(0)] = 0.$$

- 2) Avendo scelto il valore della coppia espressa dall'incastro elastico in B come incognita iperstatica  $X_1$  e facendo ricorso al metodo delle forze, il sistema effettivo può essere decomposto nella somma seguente,

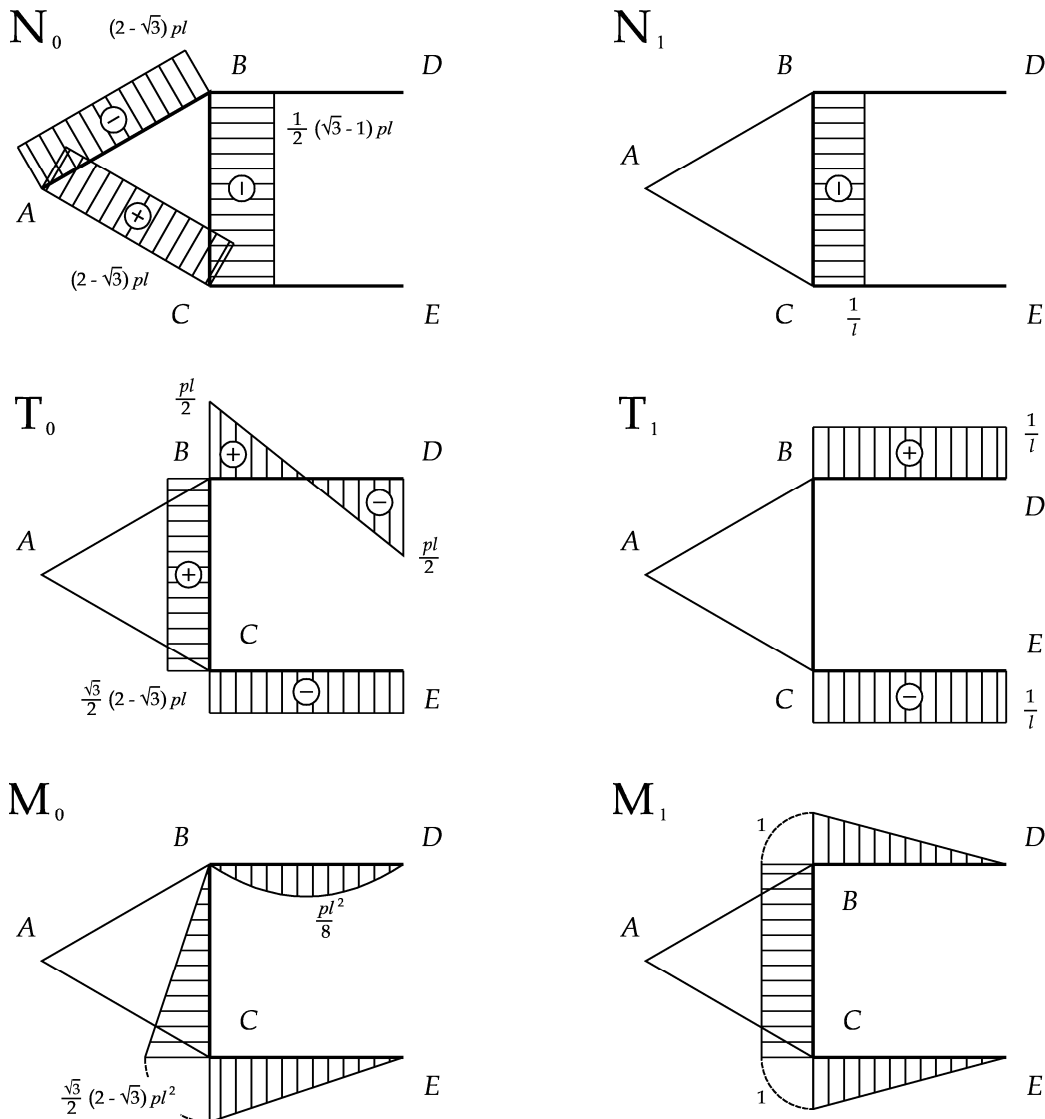
$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)}$ , dove i due sistemi  $\mathbf{F}^{(0)}$  ed  $\mathbf{F}^{(1)}$  sono quelli rappresentati in basso:



Le caratteristiche della sollecitazione nei vari tratti e nei due sistemi sono raccolte nella tabella seguente (nella quale  $s_1, s_2$  e  $s_3 \in [0, l]$ ).

	$N_0$	$T_0$	$M_0$	$N_1$	$T_1$	$M_1$
AB	$-(2-\sqrt{3})pl$	0	0	0	0	0
AC	$(2-\sqrt{3})pl$	0	0	0	0	0
BC	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2}pl$	$\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})pl$	$\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})pl(l-s_2)$	$-\frac{1}{l}$	0	-1
BD	0	$\frac{1}{2}pl - ps_3$	$\frac{1}{2}ps_3(l-s_3)$	0	$\frac{1}{l}$	$-1 + \frac{s_3}{l}$
CE	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})pl$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})pls_1$	0	$-\frac{1}{l}$	$-\frac{s_1}{l}$

A loro volta i diagrammi quotati delle CdS sono riportati nelle figure seguenti.



Facili calcoli dimostrano che i coefficienti di Müller-Breslau sono

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{k_0}; \quad \eta_{10} = \frac{20\sqrt{3}-31}{24} \frac{pl^3}{EJ} - \alpha t; \quad \eta_{11} = \frac{5l}{3EJ}.$$

$$\text{Conseguentemente, } X_1 = \left( \alpha t - \frac{20\sqrt{3}-31}{24} \frac{pl^3}{EJ} \right) / \left( \frac{5l}{3EJ} + \frac{1}{k_0} \right).$$

*Suggerimenti per rispondere ai quesiti facoltativi:*

1. Un modo per valutare l'effetto su  $X_1$  di un eventuale difetto angolare  $\bar{\theta}$  che fosse presente nell'incastro in  $C$  è di tenerne conto nel calcolo del lavoro virtuale delle forze esterne  $L_e^{1 \rightarrow 0}$  ... *(completare il ragionamento)*.
2. Ricorrendo al teorema dei lavori virtuali, lo spostamento relativo nella direzione orizzontale tra le sezioni  $D$  ed  $E$  può essere calcolato utilizzando il sistema originario reso isostatico e applicando, nelle sezioni  $D$  ed  $E$ , due azioni orizzontali di intensità unitaria ma opposte in verso...*(completare il ragionamento)*.

17 settembre 2013.