

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta in itinere del 3 giugno 2015 – Parte I

Problema. Nel sistema di figura 1 le travi BC , CD e CE sono flessibili ma inestensibili, mentre le altre sono estensibili. Sulla trave BC agisce un carico distribuito trasversale uniforme, di intensità p ; inoltre, in corrispondenza della sezione D della trave CD è applicata una coppia concentrata d'intensità $\bar{M} = pl^2$. Infine, la trave CE è soggetta alla variazione termica lineare nello spessore H della trave, indicata in figura e la trave DE presenta il difetto di lunghezza indicato in figura.

1) Nella risoluzione del problema mediante il metodo delle forze, si sceglie come incognita iperstatica X_1 il valore dello sforzo normale nell'asta BD . Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (fig. 2):

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)}, \text{ con: } w_D - w_B = \frac{X_1}{EA} l\sqrt{2},$$

dove w_B e w_D sono gli spostamenti assiali, positivi nella direzione da B verso D , delle sezioni B e D dell'asta BD .

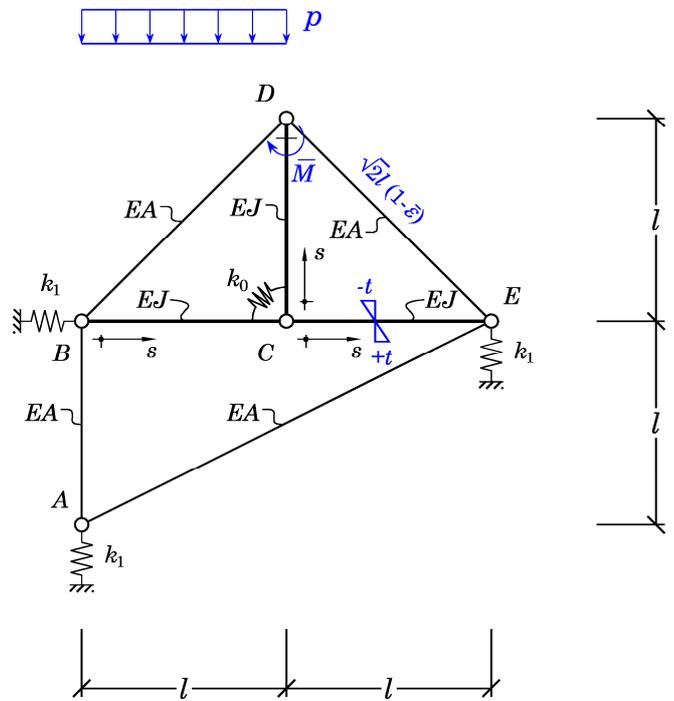


Figura 1

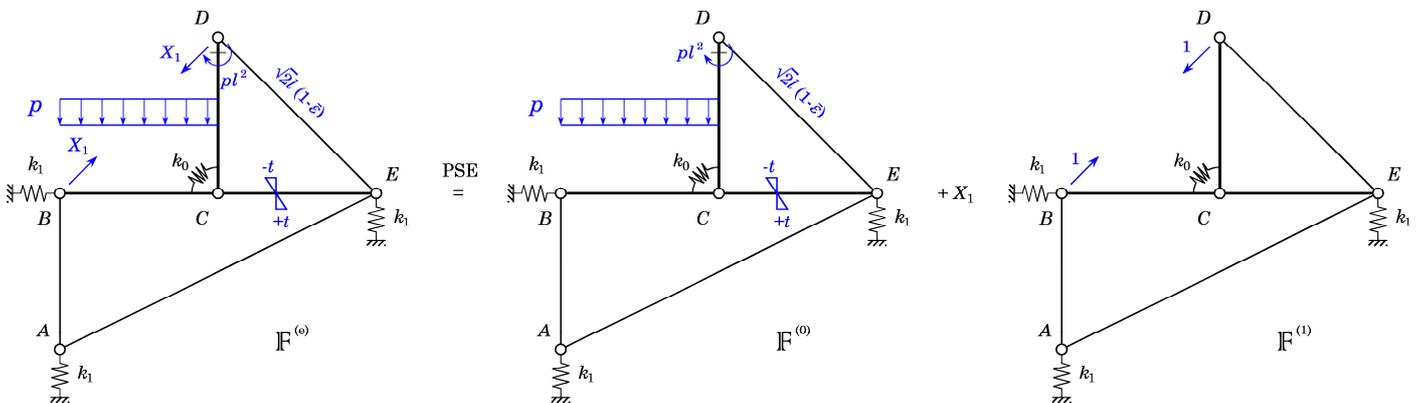


Figura 2

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare le reazioni vincolari esterne per il sistema $\mathbf{F}^{(0)}$, mentre sono nulle quelle del sistema $\mathbf{F}^{(1)}$. I due sistemi sono rappresentati nelle figure 3 e 4.

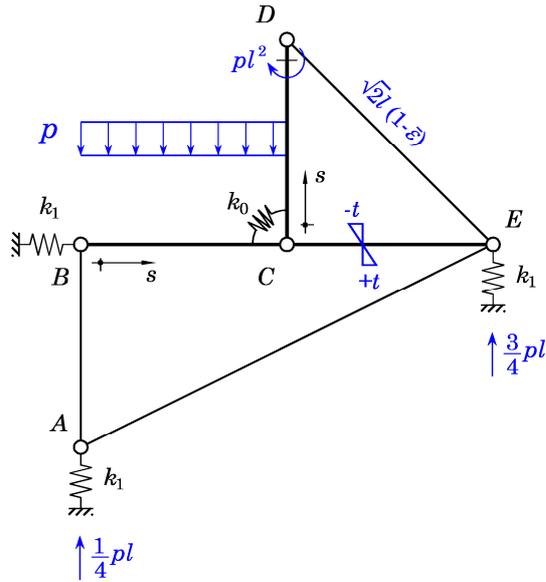


Figura 3

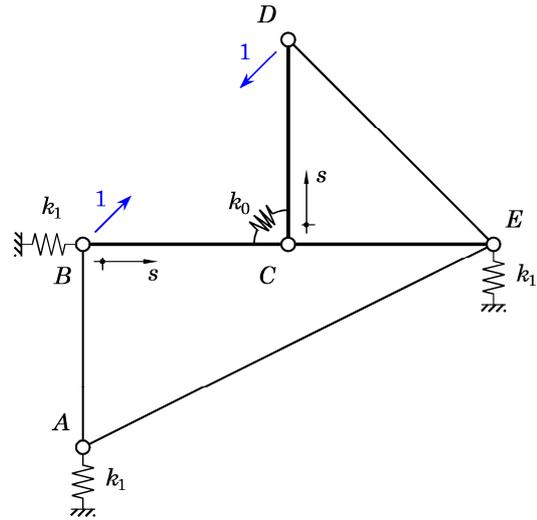


Figura 4

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale $s \in (0, l)$.

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AB	$-\frac{pl}{4}$	0	0	0	0	0
AE	0	0	0	0	0	0
BC	0	$\frac{pl}{4} - ps$	$\frac{ps}{4}(l - 2s)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{s}{\sqrt{2}}$
CD	$\frac{3}{4}pl$	$-\frac{3}{4}pl$	$-\frac{pl}{4}(l + 3s)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{l-s}{\sqrt{2}}$
CE	$\frac{3}{4}pl$	0	0	0	0	0
DE	$-\frac{3}{4}\sqrt{2}pl$	0	0	0	0	0

I diagrammi quotati delle Caratteristiche della Sollecitazione sono rappresentati nella figura 5.

I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{EA} l \sqrt{2};$$

$$1 \cdot \eta_{10} - M_{m,1}^C \frac{M_{m,0}^C}{k_0} = \int_{BC,CD} M_1 \frac{M_0}{EJ} ds; \quad \rightarrow \quad \eta_{10} = -\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{pl^3}{k_0} - \frac{7\sqrt{2}}{48} \frac{pl^4}{EJ};$$

$$1 \cdot \eta_{11} - \frac{(M_{m,1}^C)^2}{k_0} = \int_{BC,CD} \frac{M_1^2}{EJ} ds; \quad \rightarrow \quad \eta_{11} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{k_0} + \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ}.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\sqrt{2} \frac{l}{EA} + \eta_{11}}; \quad \rightarrow \quad X_1 = \frac{\frac{l^2}{k_0} + \frac{7}{6} \frac{l^3}{EJ}}{\sqrt{2} \frac{l}{EA} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{k_0} + \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ}} \frac{\sqrt{2}}{8} pl.$$

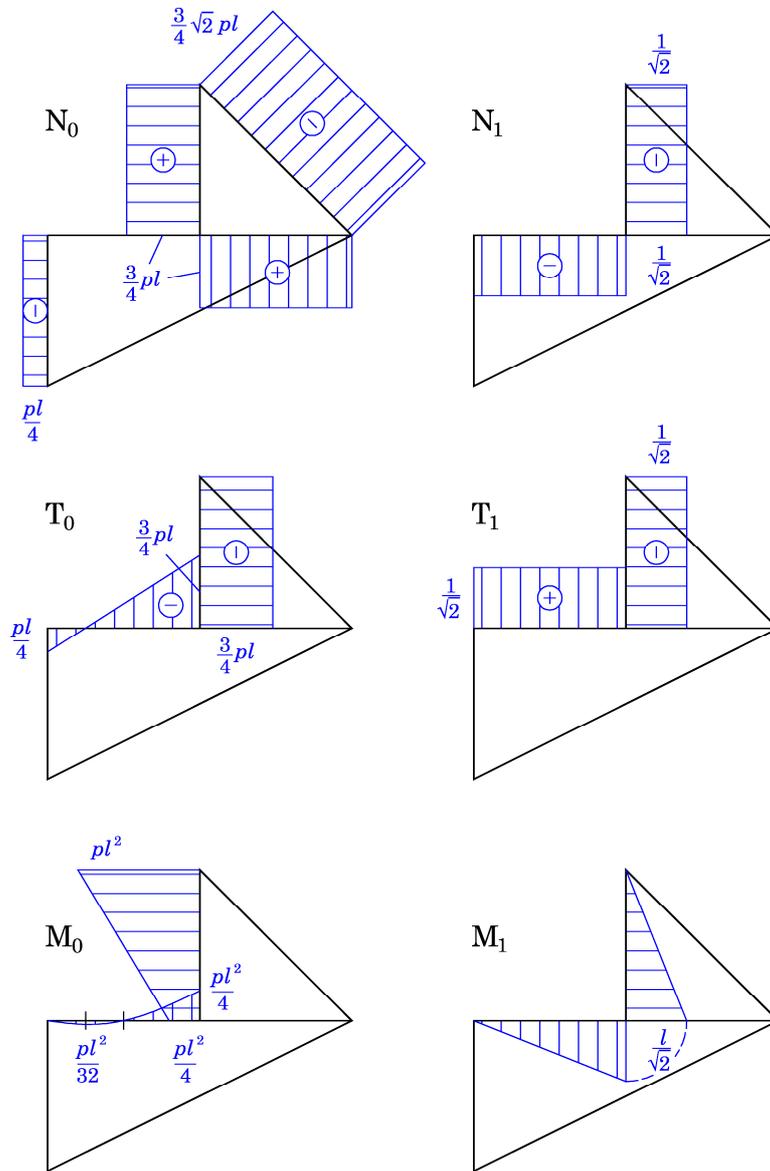


Figura 5

2) Nel caso limite nel quale i nodi B ed E sono fissi, il sistema si riduce a quello rappresentato nella figura 6. In tal caso, le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti BC (tratto 1), CD (tratto 2) e CE (tratto 3) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti:

$$EJv_1'' = p; \quad EJv_2'' = 0; \quad v_3'' = -\frac{2\alpha t}{H};$$

1. $v_1(0) = 0;$
2. $-EJv_1''(0) = 0;$
3. $v_1(l) = v_3(0);$
4. $v_2(0) = 0;$
5. $-EJv_1''(l) = -EJv_2''(0);$
6. $-EJv_2''(0) = k_0[v_1^I(l) - v_2^I(0)];$
7. $v_3(l) = 0;$
8. $-EJv_2''(l) = -pl^2;$
9. $EJv_2'''(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_{BD} - N_{DE});$
10. $-EJv_1'''(l) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_{BD} + N_{DE}).$

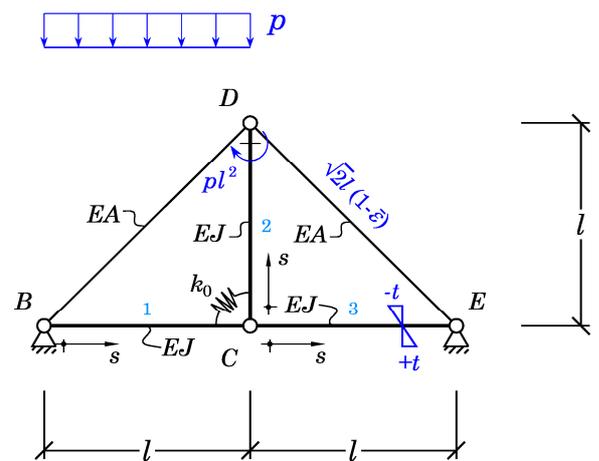


Figura 6

Avendo determinato gli sforzi nelle aste estensibili in funzione degli spostamenti del nodo D come:

$$N_{BD} = \frac{EA}{2l}[v_2(l) - v_1(l)]; \quad N_{DE} = \frac{EA}{2l}[2l\bar{\epsilon} - v_2(l) - v_1(l)].$$