

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta in itinere del 28 marzo 2015 – Parte I

Problema. Nel sistema di figura 1 le travi AB , BC e CD sono flessibili ma inestensibili, mentre le altre sono estensibili. Sulle travi BC e CD agisce un carico distribuito trasversale uniforme, di intensità p . Inoltre le travi BE e DE presentano il difetto di lunghezza indicato.

1) Il sistema è due volte staticamente iperdeterminato. Nella risoluzione mediante il metodo delle forze, si scelgono come incognita iperstatica X_1 il valore dello sforzo normale nell'asta CE e come incognita iperstatica X_2 il valore dello sforzo normale nell'asta DE . Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (fig. 2):

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)} + X_2 \mathbf{F}^{(2)},$$

con: $w_C - w_E = -\frac{X_1}{EA}l$ e $\hat{w}_D - \hat{w}_E = -\left(\frac{X_2}{EA} - \bar{\epsilon}\right)l\sqrt{2}$,

dove w_C e w_E sono gli spostamenti assiali, positivi nella direzione da C verso E , delle sezioni C ed E dell'asta CE e \hat{w}_D e \hat{w}_E sono gli spostamenti assiali, positivi nella direzione da D verso E , delle sezioni D ed E dell'asta DE .

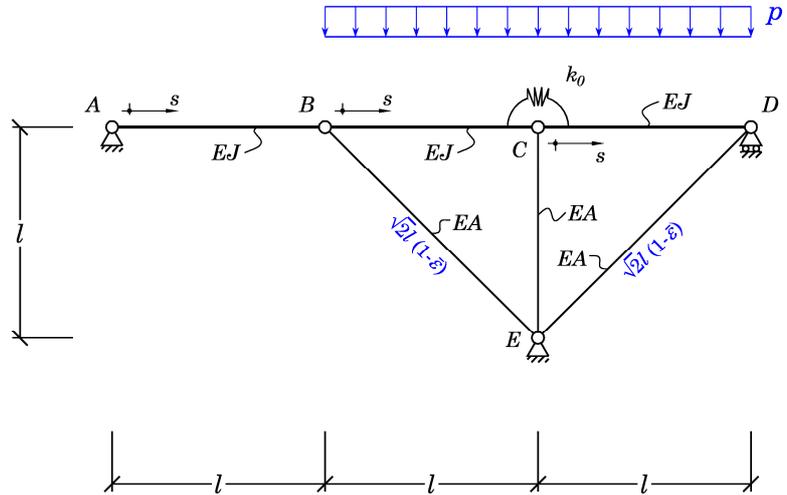


Figura 1

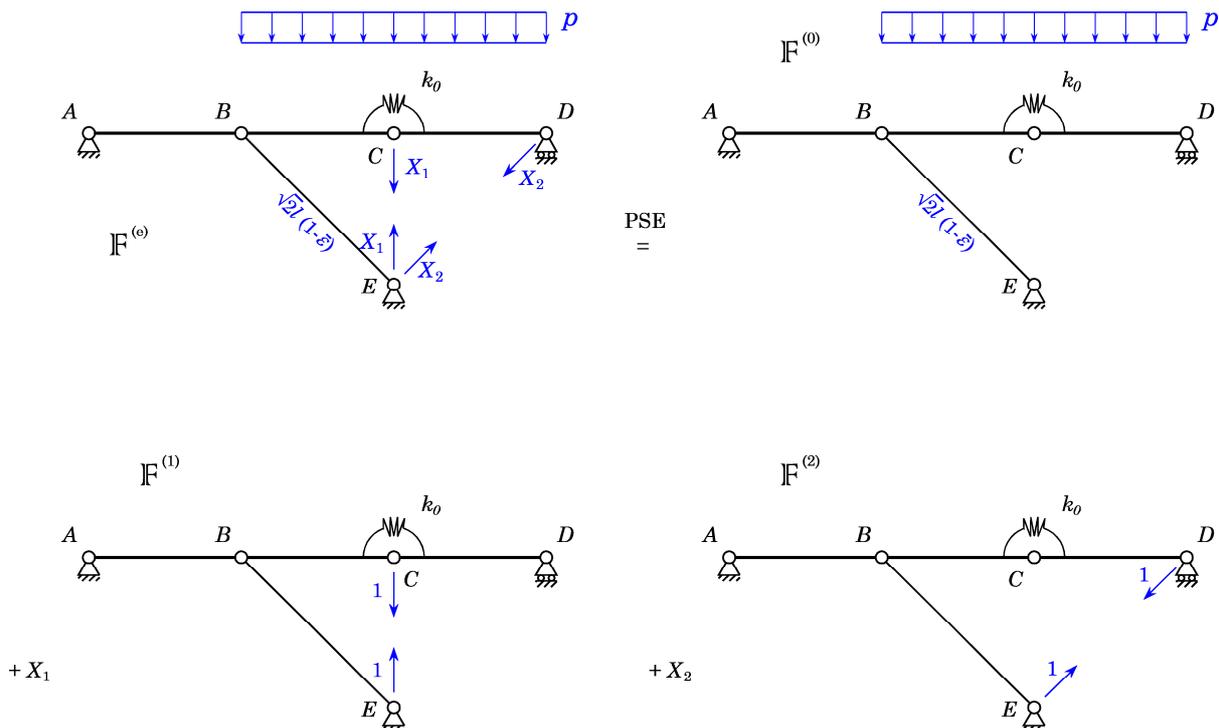


Figura 2

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare le reazioni vincolari esterne per i sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$, $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$. I tre sistemi sono rappresentati nelle figure 3, 4 e 5.

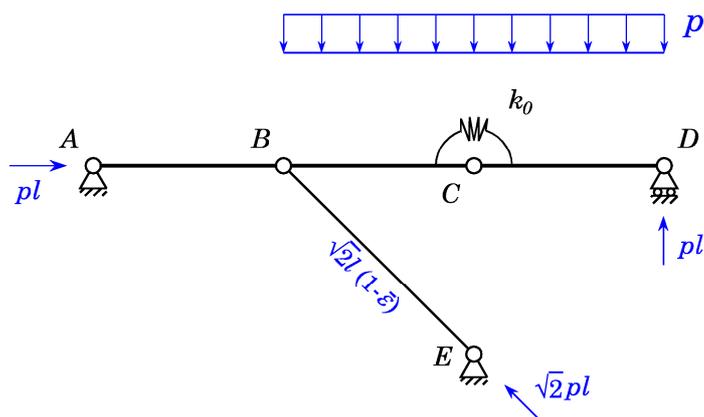


Figura 3

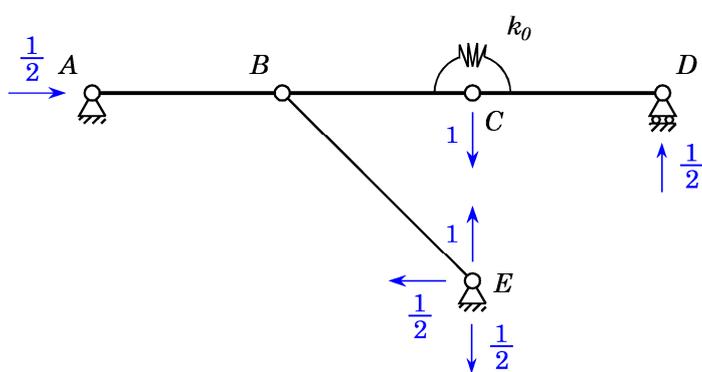


Figura 4

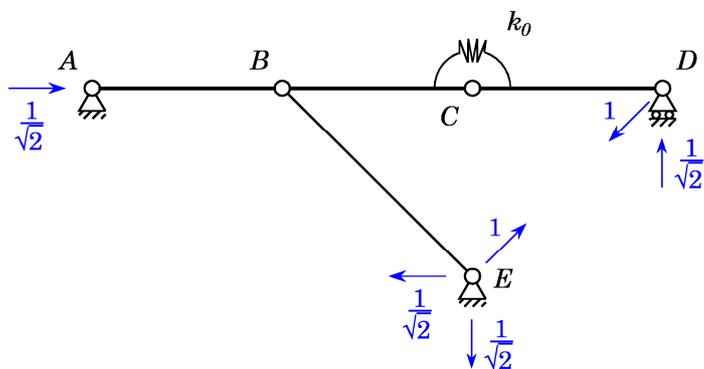


Figura 5

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$, $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale $s \in (0, l)$.

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1	N_2
AB	$-pl$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
BC	0	$p(l-s)$	$ps\left(l-\frac{s}{2}\right)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{s}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
CD	0	$-ps$	$\frac{p}{2}(l^2-s^2)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{l-s}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
BE	$-\sqrt{2}pl$	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella figura 6.

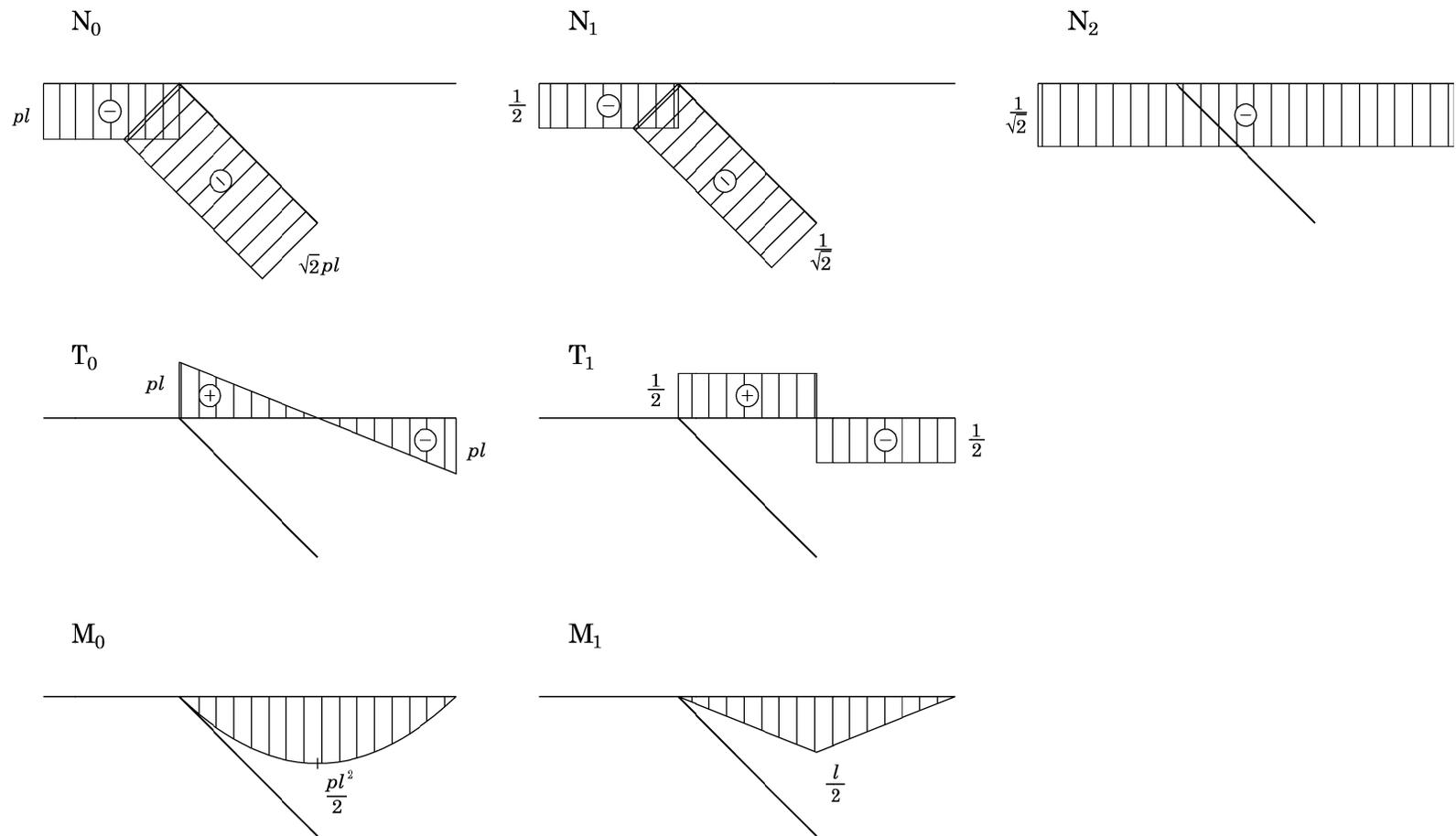


Figura 6

Il sistema costituito dalle equazioni di elasticità è

$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11}X_1 + \eta_{12}X_2 \\ \eta_2 = \eta_{20} + \eta_{21}X_1 + \eta_{22}X_2 \end{cases},$$

dove i coefficienti di Müller-Breslau che vi compaiono sono:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\frac{X_1 l}{EA}; & \eta_{10} &= \frac{5}{24} \frac{pl^4}{EJ} + \frac{pl^3}{4k_0} + \sqrt{2} \frac{pl^2}{EA} + \bar{\varepsilon} l; & \eta_{11} &= \frac{l^3}{6EJ} + \frac{l^2}{4k_0} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{l}{EA}; & \eta_{12} &= 0; \\ \eta_2 &= -\left(\frac{X_2}{EA} - \bar{\varepsilon}\right) l \sqrt{2}; & \eta_{20} &= 0; & \eta_{21} &= \eta_{12}; & \eta_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Conseguentemente,

$$X_1 = -\frac{\left(\sqrt{2} + \frac{5}{24} \frac{EA l^2}{EJ} + \frac{EA l}{4k_0}\right) pl + EA \bar{\varepsilon}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{EA l^2}{6EJ} + \frac{EA l}{4k_0}} \quad \text{e} \quad X_2 = EA \bar{\varepsilon}.$$

2) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti *AB* (tratto 1), *BC* (tratto 2) e *CD* (tratto 3) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti (figura 1):

$$\begin{aligned} EJv_1'' &= 0; & EJv_2^{IV} &= p; & EJv_3^{IV} &= p; \\ 1. \quad v_1(0) &= 0; & 2. \quad v_1(l) &= v_2(0); & 3. \quad -EJv_2''(0) &= 0; \\ 4. \quad v_2(l) &= v_3(0); & 5. \quad -EJv_2''(l) &= -EJv_3''(0); & 6. \quad -EJv_3''(0) &= k_0 [v_2^I(l) - v_3^I(0)]; \\ 7. \quad v_3(l) &= 0; & 8. \quad -EJv_3''(l) &= 0; & 9. \quad -EJv_2'''(0) + \frac{1}{\sqrt{2}} N_{BE} &= 0; \\ 10. \quad -EJ [v_2'''(l) - v_3'''(0)] - N_{CE} &= 0. \end{aligned}$$

Avendo determinato gli sforzi nelle aste estensibili in funzione degli spostamenti trasversali delle sezioni *B* e *C* come:

$$N_{BE} = EA \left[\bar{\varepsilon} - \frac{v_2(0)}{2l} \right]; \quad N_{CE} = -EA \frac{v_3(0)}{l}.$$

3) Assumendo che le incognite iperstatiche valgano

$X_1 = -\frac{pl}{2}$ e $X_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} pl$, i diagrammi delle CdS per le travi *AB*, *BC* e *CD* nel sistema effettivo sarebbero quelli rappresentati nella figura 7.

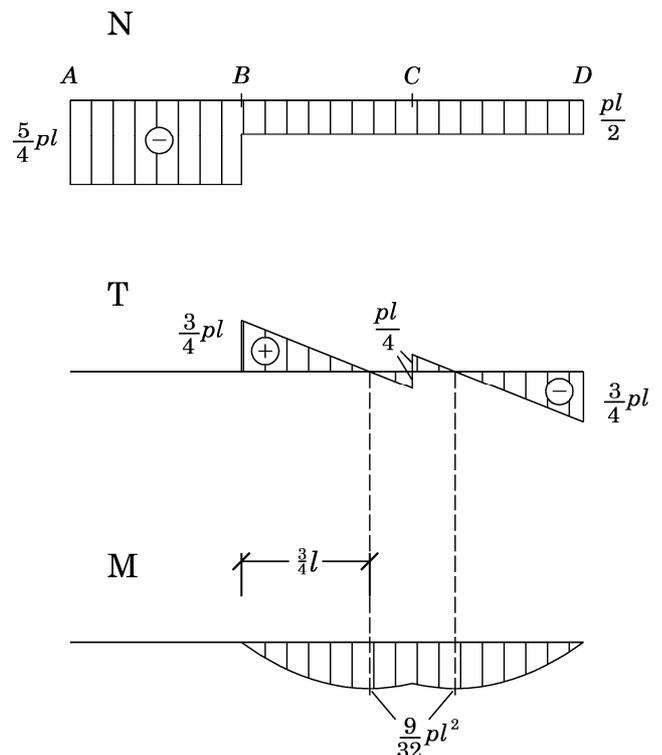


Figura 7