Capitolo 6

- **Tipi di laminati di uso frequente**

Introduzione

- In questo capitolo si considerano alcuni tipi di laminati di uso frequente nelle applicazioni e le loro proprietà elastiche.
- I risultati che seguono riguardano solo i laminati a strati identici, in quanto solo in tal caso si possono dare delle regole generali riguardanti le proprietà elastiche e la loro progettazione.
- In effetti, nel capitolo precedente si è visto come il comportamento di un laminato a strati identici sia condizionato, da un lato dalle proprietà elastiche dello strato di base, dall'altro dalla sequenza degli strati e dalla loro orientazione.
- Un punto fondamentale riguarda proprio le orientazioni: i vari strati sono in genere orientati in modo diverso, e quindi, come più volte notato, nelle formule che forniscono i vari tensori che descrivono il comportamento di un laminato, i tensori di rigidezza degli strati devono essere ruotati nel riferimento globale del laminato. Questo si fa con la trasformazione di pagina 308.

Introduzione

- Ora, se si osservano le formule di questa trasformazione si nota che esse dipendono da combinazioni di quarto grado delle funzioni circolari dell'orientazione δ_k dello strato.
- Questo implica che la progettazione di un laminato quando le orientazioni degli strati sono le variabili di progetto è un problema molto complicato e in generale a soluzione non unica (se formulato come un problema di ottimo è non convesso).
- Allora, si sono sviluppate negli anni tutta una serie di regole pratiche per progettare i laminati, in particolare per ottenere dei laminati rispondenti a certi requisiti di rigidezza in termini di simmetrie elastiche (si è già notato che il disaccoppiamento per i laminati a strati identici può essere visto come un problema di isotropia di **B**).
- Queste regole sono solo, in generale, delle *condizioni sufficienti, ma non necessarie*, per ottenere una certa proprietà. Si tratta il più delle volte di regole semplici, a volte intuitive, che hanno dato luogo ad alcune classi di laminati di uso particolarmente frequente.

Laminati disaccoppiati

- La proprietà più ricercata in un laminato è il disaccoppiamento elastico, cioè si vuole sempre, tranne alcuni casi particolari cui si è fatto cenno, $\mathbf{B} = \mathbf{O}$.
- Se si considerano allora le formule di pagina 351 (Cartesiane) o anche di pagina 356 (polari) e si ricorda che i coefficienti b_k variano linearmente sullo spessore e che sono antisimmetrici rispetto al piano medio, si ricava subito che una condizione sufficiente per avere $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ è quella di disporre gli strati in modo simmetrico rispetto al piano medio, ossia in modo che

$$\delta_k = \delta_{-k}, \quad \forall k = -p,...,p.$$

- Questa regola, molto semplice, è quella seguita nella quasi totalità dei casi. Tuttavia, si deve sottolineare che, contrariamente a quanto spesso affermato a torto, questa regola non è necessaria, ma solo *sufficiente* per il disaccoppiamento elastico.

Laminati disaccoppiati

- Già nel 1982 Caprino e Crivelli Visconti avevano dimostrato l'esistenza di laminati disaccoppiati a sequenza non simmetrica.
- In seguito, Vannucci e Verchery (1998) hanno mostrato che il numero di soluzioni disaccoppiate simmetriche è molto esiguo in una classe più vasta di laminati disaccoppiati (sequenze *quasi-banali*).
- Inoltre, lo svantaggio più grande a utilizzare le sequenze simmetriche, sta nel fatto che, se si vuole ottenere il disaccoppiamento, si è spesso obbligati a raddoppiare il numero degli strati; in altre parole, l'utilizzo delle sequenze simmetriche nella ricerca di laminati aventi certe proprietà, comporta spesso un numero di strati molto superiore a quello minimo con cui si sarebbero potute ottenere le stesse proprietà richieste.
- La ricerca di laminati disaccoppiati a sequenza non simmetrica è possibile sia in modo esatto, facendo ricorso al concetto di sequenza quasi-banale, sia in modo approssimato, utilizzando procedure numeriche di ricerca.

Laminati equilibrati

- I laminati equilibrati (*balanced* in inglese) sono quelli per cui ad ogni strato orientato dell'angolo θ corrisponde uno strato orientato dell'angolo $-\theta$. Si tratta quindi di laminati a numero pari di strati.
- Se inoltre la sequenza è simmetrica, allora si ha anche il disaccoppiamento.
- L'interesse di questa classe di laminati sta nel fatto che hanno un comportamento ortotropo in membrana.
- Infatti, per questi laminati,

$$\mathbf{A} = \frac{h}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{Q}(\delta_k) = \frac{h}{n}\sum_{k=1}^{n/2}[\mathbf{Q}(\delta_k) + \mathbf{Q}(-\delta_k)].$$

- Ora, dato che lo strato di base è sempre ortotropo, se si considera, vedi formule a pagina 308, che

$$Q_{xs}(-\theta) = -Q_{xs}(\theta),$$
$$Q_{ys}(-\theta) = -Q_{ys}(\theta),$$

Laminati equilibrati

si ricava immediatamente, per la formula di **A**, che

$$A_{xs} = A_{ys} = 0.$$

- Dunque, il laminato è ortotropo in membrana nel riferimento globale della piastra.
- Questo in generale non è vero in flessione. Infatti,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{12}\frac{h^3}{n^3}\sum_{k=-p}^{p} d_k \mathbf{Q}(\delta_k),$$

e la presenza dei coefficienti d_k non permette di ottenere automaticamente l'ortotropia di flessione. Tuttavia, dal momento che (vedi pagina 354) $d_k = d_{-k}$, se la sequenza è *antisimmetrica*, cioè se $\delta_{-k} = -\delta_k$, si ha che

$$d_{-k} Q_{xs}(\delta_{-k}) = -d_k Q_{xs}(\delta_k),$$
$$d_{-k} Q_{ys}(\delta_{-k}) = -d_k Q_{ys}(\delta_k).$$

Laminati equilibrati

- Dunque,

$$D_{xs} = \frac{1}{12}\frac{h^3}{n^3}\sum_{k=-p}^{p} d_k Q_{xs}(\delta_k) = \frac{1}{12}\frac{h^3}{n^3}\sum_{k=-p}^{0} d_k \left[Q_{xs}(\delta_k) - Q_{xs}(\delta_k)\right] = 0,$$
$$D_{ys} = \frac{1}{12}\frac{h^3}{n^3}\sum_{k=-p}^{p} d_k Q_{ys}(\delta_k) = \frac{1}{12}\frac{h^3}{n^3}\sum_{k=-p}^{0} d_k \left[Q_{ys}(\delta_k) - Q_{ys}(\delta_k)\right] = 0,$$

e quindi il laminato è ortotropo anche in flessione, non solo in membrana.
- Tuttavia, essendo la sequenza non simmetrica, il laminato sarà in generale accoppiato (ma non necessariamente; Valot e Vannucci, 2005, hanno mostrato l'esistenza di laminati completamente ortotropi, antisimmetrici e disaccoppiati).
- Quindi, se anche **A** e **D** sono ortotropi, in generale **a** e **d** non lo saranno, essendo **B≠O** (vedere formule a pagina 322); è un caso tipico che mostra la difficoltà di definire le simmetrie elastiche per i laminati: si ha ortotropia in rigidezza, ma non in cedevolezza, a causa dell'accoppiamento.

Laminati equilibrati

- Questo esempio mostra la difficoltà di ottenere laminati che siano ortotropi in flessione e disaccoppiati. Questo problema è ancora oggi una difficoltà maggiore nell'ottimizzazione dei laminati rispetto ai problemi di stabilità elastica.
- In effetti, la messa a punto di metodi, analitici e numerici, per la ricerca di laminati disaccoppiati e ortotropi in flessione è ancora oggetto di ricerca; ancora più difficile è la ricerca di laminati completamente ortotropi e disaccoppiati, ed eventualmente con gli stessi assi di ortotropia in membrana ed in flessione. In tali casi, si deve in genere ricorrere a metodi numerici, se non si vuol far uso di sequenze *cross-ply* (vedi oltre).

Laminati *angle-ply*

- Un laminato *angle-ply* è un caso particolare di laminato equilibrato, in cui si ha una sola orientazione possibile, θ, e la sua opposta, $-\theta$.
- In questo caso, si ha che

$$\mathbf{A}=\frac{h}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{Q}(\delta_k)=\frac{h}{2}[\mathbf{Q}(\theta)+\mathbf{Q}(-\theta)]=h\begin{bmatrix}Q_{xx} & Q_{xy} & 0\\ Q_{xy} & Q_{yy} & 0\\ 0 & 0 & Q_{ss}\end{bmatrix}.$$

- Il laminato è ortotropo in membrana e le componenti Q_{xx} etc qui sopra sono quelle della lamina, ruotate di θ rispetto al riferimento globale (formule di pagina 308).
- Come già detto per il caso dei laminati equilibrati, **D** non è ortotropo, in generale.
- Normalmente, si utilizzano sequenze *angle-ply* simmetriche.

Laminati *cross-ply*

- I laminati cross-ply hanno strati orientati solo a 0° o 90°.
- In questo modo, essendo gli strati ortotropi e con gli assi di ortotropia coincidenti con quelli del laminato, questo è completamente ortotropo, sia per **A** che per **B** e **D**.
- E' il caso dei pannelli multistrato in legno.
- Contrariamente a quanto spesso si afferma, il loro comportamento resta ortotropo, non isotropo, nemmeno se si ha lo stesso numero di strati nelle due direzioni ortogonali.

Laminati quasi isotropi

- Nella letteratura tecnica si indica con *quasi-isotropo* un laminato per il quale la sequenza comporta solo delle orientazioni a 0°, ±45°, 90°.
- Inoltre, il numero degli strati a 45° deve essere uguale a quello a -45°.
- In queste condizioni, si evince subito, basta ricordare quanto detto su angle-ply e cross-ply, che il comportamento in membrana è ortotropo.
- In aggiunta, se il numero degli strati in ogni direzione è identico, allora il comportamento di membrana è isotropo, ma non quello di flessione, vedi paragrafo seguente, da cui il nome dato al tipo di sequenza.
- Questi laminati sono molto utilizzati soprattutto in aeronautica. La ragione è che essi offrono una buona uniformità in rigidezza e resistenza secondo tutte le direzioni, ed anche un buon contrasto alla propagazione delle fessure.

Laminati isotropi

- Anche se nella maggior parte dei loro impieghi i laminati in composito hanno un comportamento anisotropo, concepito secondo i bisogni strutturali, in certi casi si usano laminati a risposta isotropa.
- Questo è necessario per esempio quando si debbano conciliare i requisiti di leggerezza con quelli di una risposta elastica che si desidera costante con la direzione, in genere perché causata da azioni di diversa natura e direzione.
- Werren e Norris (1950) hanno dato per primi una regola semplice, sufficiente ma non necessaria, per l'isotropia in membrana: se lo strato di base è a rinforzo unidirezionale, si deve disporre lo stesso numero q di strati secondo m orientazioni diverse, con $m\geq 3$, sfalsate di un angolo costante pari a π/m.
- Soluzioni possibili sono dunque delle sequenze di tipo

$$0°_q/60°_q/-60°_q\ , \quad q=n/3;$$
$$0°_q/45°_q/-45°_q/90°_q\ , \quad q=n/4;$$
$$0°_q/36°_q/72°_q/108°_q/144°_q\ , \quad q=n/5; \quad \text{etc.}$$

Laminati isotropi

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

- Se il rinforzo dello strato di base è in tessuto equilibrato, allora si dimostra facilmente, con il metodo polare, che basta disporre un numero identico di strati a 0° e a 45°.
- Generalmente, si applica la regola di Werren e Norris a sequenze simmetriche, così da ottenere laminati disaccoppiati e isotropi in membrana.
- Utilizzando il metodo polare, Person, Vannucci e Verchery (2000) hanno dato un'altra condizione sufficiente ed esatta per costruire laminati isotropi in membrana, senza che si tratti di una soluzione di tipo Werren e Norris.
- L'isotropia totale, di **A** e di **D**, o anche solo di **D**, è molto più complicata e non esistono regole generali.
- Alcune soluzioni esatte sono state date da Paradies (1996) per la sola isotropia di flessione.
- La prima soluzione esatta di un laminato totalmente isotropo è dovuta a Verchery e Vong (1986), con una sequenza di 48 strati.

Laminati isotropi

- Successivamente, dei tentativi sono stati fatti da diversi ricercatori per trovare soluzioni esatte totalmente isotrope con un numero sempre inferiore di strati; Vannucci e Verchery hanno proposto 5 soluzioni totalmente isotrope, esatte, non simmetriche a 18 strati, che sembra essere il numero minimo per una soluzione esatta.
- Per via numerica, diversi studiosi hanno poi trovato soluzioni approssimate totalmente isotrope con un minimo di 12 strati unidirezionali; non sembra possibile ottenere l'isotropia totale con un numero inferiore di strati unidirezionali (non a simmetria del quadrato o R_0-ortotropi).
- Se invece si utilizzano strati a ortotropia particolare (simmetria del quadrato o ortotropia R_0), allora si possono ottenere soluzioni approssimate totalmente isotrope con 7 strati (Grédiac, 2001, Vannucci, 2002), che sembra essere il numero minimo di strati necessario per ottenere l'isotropia totale.

Laminati quasi-omogenei

- Un laminato, si è già detto, ha in genere un comportamento diverso in membrana ed in flessione, cioè in generale **A***≠ **D***, ed in più è, se non si prendono le dovute precauzioni, accoppiato, **B** ≠ **O**.
- Tuttavia, è possibile fare in modo che il laminato si comporti a tutti gli effetti come se fosse costituito da un unico strato, quindi come se fosse omogeneo; un tal laminato è detto *quasi-omogeneo*.
- Questa nozione è stata introdotta per primo da Verchery (Verchery e Kandil, 1988), che ne ha anche fornito le prime soluzioni. Successivamente, è stata ripresa da Wu e Avery (1992), con lo stesso significato, ed in seguito da Grédiac (1998) e da Verchery e Vannucci (1998), che ne hanno dato un metodo di ricerca di soluzioni esatte (sequenze quasi-banali).
- L'utilizzo di laminati quasi-omogenei può rivelarsi utile in diverse circostanze, per esempio nel caso dell'elaborazione di tests sperimentali particolari oppure in certi problemi di ottimizzazione.

Laminati quasi-omogenei

- Per analizzare la quasi-omogeneità di introduce il *tensore di omogeneità*:

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}^*-\mathbf{D}^*.$$

- Allora, un laminato è quasi-omogeneo se e solo se

$$\mathbf{B}=\mathbf{O},$$
$$\mathbf{C}=\mathbf{O}.$$

- Si ha dunque, per un laminato a strati identici,

$$\mathbf{C}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}c_k\mathbf{Q}(\delta_k),$$
$$c_k=n^2-d_k=-2n^2-12k(k-n-1)-4-6n.$$

- E' interessante anche scrivere le condizioni della quasi-omogeneità in polare, ed utilizzando la numerazione degli strati di pagina 353, quella con gli strati numerati a partire dal centro.

Laminati quasi-omogenei

- Infatti, in tal caso si ottiene facilmente che le componenti polari di **C**, indicate dal simbolo ˘, sono

$$\breve{T}_0=0,$$
$$\breve{T}_1=0,$$
$$\breve{R}_0\,e^{4i\breve{\Phi}_0}=\frac{1}{n^3}R_0\,e^{4i\Phi_0}\sum_{k=-p}^{p}c_k\,e^{4i\delta_k},$$
$$\breve{R}_1\,e^{2i\breve{\Phi}_1}=\frac{1}{n^3}R_1\,e^{2i\Phi_1}\sum_{k=-p}^{p}c_k\,e^{2i\delta_k},$$

con

$$c_k=\begin{cases}4(p^2+p-3k^2) & \text{se } n=2p+1,\\ 4\left[p^2-3k^2+3|k|-1\right],\ c_0=0 & \text{se } n=2p.\end{cases}$$

Laminati quasi-omogenei

- Si osserva che, come già per **B**, anche per **C** la parte isotropa è nulla, e quindi la quasi-omogeneità si interpreta in termini di simmetrie elastiche come l'isotropia dei tensori **B** e **C**.
- Inoltre, i coefficienti c_k variano quadraticamente sullo spessore e sono simmetrici rispetto al piano medio.
- Un laminato sarà quindi quasi-omogeneo se e solo se

$$\sum_{k=-p}^{p} b_k \, e^{4i\delta_k} = 0,$$
$$\sum_{k=-p}^{p} b_k \, e^{2i\delta_k} = 0,$$
$$\sum_{k=-p}^{p} c_k \, e^{4i\delta_k} = 0,$$
$$\sum_{k=-p}^{p} c_k \, e^{2i\delta_k} = 0.$$

- Queste sono 8 condizioni reali da rispettare; in effetti, le condizioni sono 12, corrispondenti all'annullamento delle 12 componenti Cartesiane dei 2 tensori **B** e **C**, ma come si è visto in

Laminati quasi-omogenei

polare, 4 condizioni sono automaticamente rispettate, quelle riguardanti le componenti polari di isotropia, se gli strati sono identici, e dunque non restano che 8 condizioni indipendenti, che in polare sono quelle indicate qui sopra.

- La nozione di quasi-omogeneità può essere estesa al caso termoelastico: un laminato è quasi-omogeneo termoelasticamente se, oltre alle condizioni elastiche di quasi-omogeneità, è anche

$$\mathbf{L} = \mathbf{O},$$

dove **L** è il tensore di omogeneità termoelastica:

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}^* - \mathbf{W}^*.$$

- Utilizzando le espressioni viste per **U** e **W** si ottiene

$$\mathbf{L} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} c_k \gamma(\delta_k),$$

i coefficienti c_k essendo gli stessi del tensore **C**.

Laminati quasi-omogenei

- Ancora una volta, passando alle componenti polari di **L** si trova

$$\breve{T}=0, \qquad \breve{R}\, e^{2i\breve{\Phi}}=\frac{1}{n^3} R\, e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^{p} c_k\, e^{2i\delta_k}.$$

- Dunque, la condizione aggiuntiva per la quasi-omogeneità termoelastica è

$$\sum_{k=-p}^{p} c_k\, e^{2i\delta_k}=0.$$

- Ora, questa è già una delle condizioni precedenti, il che significa che un laminato quasi-omogeneo elasticamente lo è anche termoelasticamente, ma il contrario non è in generale vero (nel senso che esistono laminati che verificano **B**=**L**=**O** ma non **C**=**O**).
- In altre parole, la coincidenza delle caratteristiche elastiche rende anche uguali i coefficienti termici, di dilatazione e di curvatura, in ogni direzione, ma non il contrario.
- Per la parte igro-elastica si hanno risultati analoghi.