Capitolo 7

- **Alcuni metodi classici di progetto dei laminati**

Considerazioni generali

- I capitoli precedenti hanno mostrato alcune caratteristiche dei laminati, dal punto di vista meccanico, che potremmo condensare in:
  - accoppiamento membrana-flessione;
  - diverso comportamento in membrana e in flessione;
  - caratteristiche dipendenti dall'orientazione degli strati: simmetrie, rigidezze, resistenze etc.
- In una parola, si può dire che un laminato è un *materiale da progettare*.
- Ma quando si dice questo, si deve capire cosa ciò implica nel caso di un laminato.
- In effetti, per un materiale classico, come un metallo, il solo dato di progetto di una piastra è lo spessore.
- Invece, in un laminato, si devono stabilire tre tipi di dati:
  - il numero degli stati;
  - l'orientazione degli strati;
  - il materiale degli strati.

Considerazioni generali

- Anche limitandosi al caso, come faremo nel seguito, di un laminato a strati identici, e fissando *a priori* il numero degli strati, ciò che si fa il più delle volte, resta il problema di progettare prendendo come variabili di progetto le orientazioni degli strati.
- Crescendo il numero degli strati, il numero delle variabili di progetto cresce e dunque si ha a che fare in genere con problemi a molte variabili.
- Inoltre, basta uno sguardo alle formule di composizione dei tensori **A**, **B**, **D** etc., e alle formule di rotazione di pagina 308 per comprendere le difficoltà che si incontrano.
- Infatti, le variabili di progetto, le orientazioni degli strati, appaiono nelle componenti dei tensori sotto forma di argomento di funzioni circolari, in combinazioni di quarto grado di queste.
- Inoltre, i requisiti di rigidezza, come il modulo di Young in una direzione, si calcolano a partire dalle componenti dei tensori inversi **a**, **d** etc. e questo complica ulteriormente le cose.

Considerazioni generali

- Non si deve poi dimenticare che accanto alla massimizzazione o minimizzazione di una certa grandezza, si vuole che il laminato rispetti certi requisiti elastici generali, riconducibili tutti ad una simmetria elastica: ortotropia in membrana e/o in flessione, disaccoppiamento etc. e questi requisiti non sono semplici da ottenersi.
- In definitiva, il progetto di un laminato è un'operazione difficile, per la quale non esistono ancora dei metodi universalmente validi.
- L'orientazione degli studiosi è allora stata, nel passato, quella di una semplificazione del problema.
- Dal momento che i requisiti più difficili da ottenersi sono quelli relativi alle simmetrie elastiche, in genere ci si è limitati a cercare delle soluzioni per una classe di laminati (ad esempio gli *angle-ply* simmetrici) capaci di garantire automaticamente certi requisiti, come il disaccoppiamento e l'ortotropia in membrana, i più richiesti nelle applicazioni.

Considerazioni generali

- Questo approccio permette di semplificare drasticamente il problema, ma lo trasforma anche radicalmente al punto, ad esempio, di non permettere più una vera ottimizzazione in peso.
- In certi casi, i problemi sono così difficili che si rinuncia a risolverli, tipico il caso dell'ortotropia in flessione.
- In questo senso, i metodi classici di progetto dei laminati, alcuni dei quali sono indicati succintamente qui di seguito, somigliano più a delle *rules of thumb* che a dei veri e propri metodi di progetto ottimale.

- I primi lavori sull'ottimizzazione dei laminati risalgono agli anni 70, e riguardano principalmente:
  - la rigidezza;
  - la resistenza;
  - le frequenze proprie;
  - il carico critico.

Considerazioni generali

- Altri lavori riguardano invece delle proprietà più specifiche dei laminati, come
  - la minimizzazione dei coefficienti di dilatazione termica in una direzione;
  - la distribuzione ottimale degli assi di ortotropia etc.
- Nella quasi totalità dei lavori le orientazioni degli strati sono le variabili di progetto, poche volte sono gli spessori degli strati. In ogni caso, tutti i lavori considerano dei laminati a strati identici, ipotesi che sarà adottata anche nel prosieguo del capitolo.
- Solo pochissime ricerche, ed in genere assai recenti, considerano la possibilità di sequenze non simmetriche.

- Recentemente, alcuni tentativi sono stati fatti per sistematizzare in modo più generale il problema del progetto di un laminato e per affrancarsi dai metodi classici e dalla limitatezza delle soluzioni che questi offrono.

Considerazioni generali

- Questi approcci moderni si appoggiano sempre alla formulazione di un problema di ottimo e spesso fanno ricorso, dato il forte carattere di non convessità (ed in realtà in alcuni casi di continuità di soluzioni) a degli algoritmi moderni di tipo metaeuristico.

- Nel prosieguo di questo capitolo, si passano in rassegna alcuni approcci classici di progettazione dei laminati e in seguito si fa cenno ad alcuni tentativi moderni di soluzione numerica dei problemi di progetto dei laminati.

I parametri di laminazione

- Nel caso di un laminato a strati identici, si è già visto (pagina 351) che

$$\mathbf{A}=\frac{h}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{Q}(\delta_k),\quad \mathbf{B}=\frac{1}{2}\frac{h^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}b_k\mathbf{Q}(\delta_k),\quad \mathbf{D}=\frac{1}{12}\frac{h^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}d_k\mathbf{Q}(\delta_k),$$

con

$$b_k=2k-n-1,\quad d_k=12k(k-n-1)+4+3n(n+2).$$

- Ora, se gli strati sono identici, le diverse componenti dei vari tensori dipendono, da un lato dalle caratteristiche elastiche dello strato di base, e dall'altro da una combinazione di funzioni circolari delle orientazioni.
- In principio, questi due fattori si possono separare, dal momento che, essendo le caratteristiche elastiche di base comuni a tutti gli strati, queste non dipendono dalle sommatorie che appaiono nelle formule di composizione dei tensori di rigidezza.

I parametri di laminazione

- Questa separazione tra "parte elastica" e "parte geometrica" nella rigidezza di un laminato si opera facilmente e ancora meglio se si fa ricorso ai parametri di Tsai e Pagano o al metodo polare.
- Nel primo caso, se il materiale di base è ortotropo e le sue proprietà note nel riferimento materiale, con qualche passaggio semplice si giunge a

$$\begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ A_{xy} \\ A_{ss} \\ A_{xs} \\ A_{ys} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 0 & 1 \\ 0 & -\xi_3/2 & -\xi_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_3/2 & \xi_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

per le componenti della rigidezza in membrana, a

I parametri di laminazione

$$\begin{Bmatrix} B_{xx} \\ B_{yy} \\ B_{xy} \\ B_{ss} \\ B_{xs} \\ B_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & \xi_5 & \xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_5 & \xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_7/2 & -\xi_8 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_7/2 & \xi_8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

per quelle di accoppiamento ed a

$$\begin{Bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ D_{xy} \\ D_{ss} \\ D_{xs} \\ D_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & \xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 0 & 1 \\ 0 & -\xi_{11}/2 & -\xi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_{11}/2 & \xi_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

per quelle di flessione. Nelle formule sopra, i parametri U_i sono i parametri di Tsai e Pagano, in numero di soli 5 per le ipotesi fatte circa la simmetria dello strato di base:

$$U_1=\frac{3Q_{11}+2Q_{12}+3Q_{22}+4Q_{66}}{8},\quad U_2=\frac{Q_{11}-Q_{22}}{2},$$
$$U_3=\frac{Q_{11}-2Q_{12}+Q_{22}-4Q_{66}}{8},$$
$$U_4=\frac{Q_{11}+6Q_{12}+Q_{22}-4Q_{66}}{8},\quad U_5=\frac{Q_{11}-2Q_{12}+Q_{22}+4Q_{66}}{8}.$$

- Si ribadisce che, essendo gli strati identici, questi parametri sono delle costanti in un processo di ottimizzazione, una volta scelto il materiale di base. Per questa ragione vengono chiamati invarianti da alcuni autori, ma questo evidentemente deve essere inteso nel senso appena detto, e non equivocato con l'uso corrente del termine invariante in algebra tensoriale.

- Invece, i parametri ξ_i, introdotti da Tsai e Hahn (1980), sono detti *parametri di laminazione* (*lamination parameters*) e sono definiti come

$$\xi_1=\int_{-h/2}^{h/2}\cos 2\delta\, dz=\frac{1}{n}\sum_{k=-p}^{p}\cos 2\delta_k,$$
$$\xi_2=\int_{-h/2}^{h/2}\cos 4\delta\, dz=\frac{1}{n}\sum_{k=-p}^{p}\cos 4\delta_k,$$
$$\xi_3=\int_{-h/2}^{h/2}\sin 2\delta\, dz=\frac{1}{n}\sum_{k=-p}^{p}\sin 2\delta_k,$$
$$\xi_4=\int_{-h/2}^{h/2}\sin 4\delta\, dz=\frac{1}{n}\sum_{k=-p}^{p}\sin 4\delta_k,$$

per il comportamento in membrana,

I parametri di laminazione

$$\xi_5 = \int_{-h/2}^{h/2} z\cos 2\delta \, dz = \frac{1}{n^2}\sum_{k=-p}^{p} b_k \cos 2\delta_k ,$$

$$\xi_6 = \int_{-h/2}^{h/2} z\cos 4\delta \, dz = \frac{1}{n^2}\sum_{k=-p}^{p} b_k \cos 4\delta_k ,$$

$$\xi_7 = \int_{-h/2}^{h/2} z\sin 2\delta \, dz = \frac{1}{n^2}\sum_{k=-p}^{p} b_k \sin 2\delta_k ,$$

$$\xi_8 = \int_{-h/2}^{h/2} z\sin 4\delta \, dz = \frac{1}{n^2}\sum_{k=-p}^{p} b_k \sin 4\delta_k ,$$

per l'accoppiamento e

I parametri di laminazione

$$\xi_9 = \int_{-h/2}^{h/2} z^2\cos 2\delta \, dz = \frac{1}{n^3}\sum_{k=-p}^{p} d_k \cos 2\delta_k ,$$

$$\xi_{10} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2\cos 4\delta \, dz = \frac{1}{n^3}\sum_{k=-p}^{p} d_k \cos 4\delta_k ,$$

$$\xi_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2\sin 2\delta \, dz = \frac{1}{n^3}\sum_{k=-p}^{p} d_k \sin 2\delta_k ,$$

$$\xi_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2\sin 4\delta \, dz = \frac{1}{n^3}\sum_{k=-p}^{p} d_k \sin 4\delta_k .$$

per la flessione.

- I parametri di laminazione descrivono interamente l'influenza della "geometria", in termini di numero, disposizione e orientazione degli strati, sulla rigidezza del laminato.
- Alcuni autori ne dànno una definizione leggermente differente ma equivalente.

I parametri di laminazione

- Con il metodo polare, si utilizzano le formule di pagina 356 e seguenti e si considera che lo strato di base è ortotropo.
- Allora, scegliendo Φ_1=0, che corrisponde a scegliere l'asse x_1 come asse forte di ortotropia, si ha, pagina 171, che cos $4\Phi_0=(-1)^k$, k=0,1 e che sin $4\Phi_0$=0; si ottiene allora, con semplici passaggi, che

$$\begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ A_{xy} \\ A_{ss} \\ A_{xs} \\ A_{ys} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 2 & \xi_2 & 4\xi_1 \\ 1 & 2 & \xi_2 & -4\xi_1 \\ -1 & 2 & -\xi_2 & 0 \\ 1 & 0 & -\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_4 & 2\xi_3 \\ 0 & 0 & -\xi_4 & 2\xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ (-1)^k R_0 \\ R_1 \end{Bmatrix},$$

I parametri di laminazione

$$\begin{Bmatrix} B_{xx} \\ B_{yy} \\ B_{xy} \\ B_{ss} \\ B_{xs} \\ B_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi_6 & 4\xi_5 \\ 0 & 0 & \xi_6 & -4\xi_5 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_8 & 2\xi_7 \\ 0 & 0 & -\xi_8 & 2\xi_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ (-1)^k R_0 \\ R_1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ D_{xy} \\ D_{ss} \\ D_{xs} \\ D_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \xi_{10} & 4\xi_9 \\ 1 & 2 & \xi_{10} & -4\xi_9 \\ -1 & 2 & -\xi_{10} & 0 \\ 1 & 0 & -\xi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{12} & 2\xi_{11} \\ 0 & 0 & -\xi_{12} & 2\xi_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ (-1)^k R_0 \\ R_1 \end{Bmatrix}.$$

I parametri di laminazione

- Fondamentalmente, la struttura delle formule è la stessa che con i parametri di Tsai e Pagano, ma sono diversi i coefficienti che descrivono le proprietà materiali.
- Il vantaggio nell'uso del metodo polare sta nel fatto che i 4 parametri polari sono legati direttamente alle simmetrie elastiche, vedi pagina 171.
- Per questa stessa ragione può rivelarsi più utile utilizzare le formule di pagina 356 e seguenti, che sono direttamente legate alle simmetrie elastiche del laminato, ogni volta che queste sono un obiettivo facente parte del processo di ottimizzazione dello stesso laminato.

- Con semplici passaggi si mostra che anche i tensori di rigidezza igro- e termo- elastica dipendono dagli stessi parametri di laminazione.

Il metodo di Miki

- Miki ha proposto per primo (1982) un metodo generale, grafico e analitico, basato sull'uso dei *lamination parameters*;
- Questo metodo è approssimato, e concerne ovviamente la progettazione di laminati a strati identici, inizialmente solo per le proprietà di membrana (tensore **A**), e ci limiteremo quasi esclusivamente a considerare questo caso.
- All'origine, il metodo di Miki concerne solo i laminati equilibrati e simmetrici.
- In tal caso, il comportamento è ortotropo, il che implica

$$A_{xs} = A_{ys} = 0.$$

- Inoltre, la simmetria garantisce che **B**=**O**. Dunque, i soli parametri di laminazione ξ_1 e ξ_2 definiscono interamente il progetto in membrana di un laminato disaccoppiato, se il materiale è già scelto.
- Inoltre, supponiamo che vi siano n_g gruppi di orientazioni possibili $\pm\delta_k$, con n_k strati a $\pm\delta_k$.

Il metodo di Miki

- Allora, i parametri di laminazione ξ_1 e ξ_2 (i soli che interessano nel seguito, ma per gli altri si può ovviamente procedere in modo analogo) possono essere riscritti come

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^{n_g} \nu_k \cos 2\delta_k ,$$

$$\xi_2 = \sum_{k=1}^{n_g} \nu_k \cos 4\delta_k ,$$

dove

$$\nu_k = \frac{n_k}{n}$$

è la frazione di strati del gruppo k, a orientazione $\pm\delta_k$, sul totale degli strati (da alcuni chiamata *frazione volumica degli strati*).

Il metodo di Miki

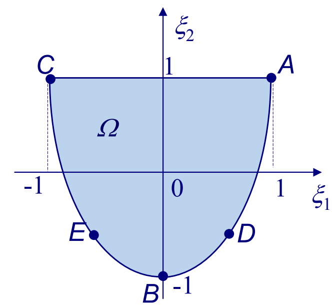
- Nel metodo di Miki si prendono proprio questi due parametri come variabili libere, in altre parole si opera un cambio di variabile di progetto, il quale adesso avviene nello spazio dei parametri di laminazione, di dimensione 2, che in genere è ridotta rispetto alla dimensione dello spazio delle autentiche variabili di progetto, le orientazioni.
- Inoltre, se si osservano le formule di pagina 391, basate sui parametri di Tsai e Pagano, o quelle di pagina 397, che fanno uso dei parametri polari, si vede che tutte le componenti cartesiane di **A** sono funzioni lineari di ξ_1 e ξ_2.
- Consideriamo dapprima un laminato *angle-ply*, cioè un laminato equilibrato in cui vi sia solo un angolo possibile di orientazione (con il suo opposto), δ; quindi n_g=1, ν_1=1.
- In questo caso, si ha ovviamente che

$$\xi_1 = \cos 2\delta, \quad \xi_2 = \cos 4\delta = 2\xi_1^2 - 1.$$

Il metodo di Miki

- In altre parole, i laminati angle-ply sono rappresentati nel piano ξ_1-ξ_2 da un arco di parabola, vedi figura, delimitato dalla condizione trigonometrica

$$-1 \leq \xi_1 \leq 1.$$



- In particolare, i punti indicati corrispondono a dei laminati particolari:
  - A=(1,1) : δ=0°;
  - B=(0,-1): δ=±45°;
  - C=(-1,1): δ=90°;
  - D=(1/2,-1/2): δ=±30°;
  - E=(-1/2,-1/2): δ=±60°;
- Nel caso in cui si abbiano diverse orientazioni possibili $\pm\delta_k$, allora si dimostra che la seconda equazione alla pagina precedente diviene una condizione limite:

$$\xi_2 \geq 2\xi_1^2 - 1,$$

Il metodo di Miki

e quindi la regione ammissible Ω nel piano ξ_1-ξ_2 è il settore di parabola delimitato dalle condizioni

$$-1 \leq \xi_1 \leq 1, \quad 2\xi_1^2 - 1 \leq \xi_2 \leq 1.$$

- Ogni punto del dominio Ω è detto *punto di laminazione*. Ad esso corrisponde una sola coppia $\{\xi_1, \xi_2\}$, e dunque un solo tensore **A**, ma questo stesso punto di laminazione può essere ottenuto con diverse combinazioni di orientazioni di uno stesso numero, o di un numero diverso, di strati.
- Questo è il punto essenziale: *non vi è corrispondenza biunivoca tra la rigidezza e la sequenza degli strati*.
- Dunque, se si risolve il problema con i parametri di laminazione, si deve disporre successivamente di un criterio per risalire alle orientazioni o comunque per poterle scegliere.
- A questo scopo, è importante osservare che è possibile legare i punti di laminazione sul bordo di Ω con quelli all'interno di Ω.

Il metodo di Miki

- Infatti, le formule di pagina 401 mostrano che i parametri di laminazione sono funzioni lineari delle frazioni volumiche degli strati, le ν_k.
- Allora, i parametri di laminazione lungo una linea retta che collega due punti di Ω rappresentano dei laminati con frazioni volumiche proporzionali alla distanza tra questi due punti.
- In altre parole, il vettore di frazioni volumiche $\mathbf{v}_Q=(\nu_1, \ldots, \nu_g)$ di un punto di laminazione *Q* che si trova tra i punti *P* e *R*, distanti ℓ, sarà

$$\mathbf{v}_Q=(1-r)\mathbf{v}_P+r\,\mathbf{v}_R,$$

dove $r\ell$ è la distanza di *Q* da *P* e $\mathbf{v}_P$, $\mathbf{v}_R$ i vettori delle frazioni volumiche di *P* e *R*.

- Allora, i punti che si trovano tra *A* e *C*, vedi figura precedente, saranno dei laminati con strati a 0° e 90° soltanto, dunque *AC* è la linea dei *cross-ply*.

Il metodo di Miki

- Ad esempio, il punto *P*=(0.2,1) rappresenta un cross-ply in cui il 60% degli strati sono a 0° ed il 40% a 90°; è il caso dei laminati tipo $[0_3/90_2]_s$, ad esempio.
- La linea *AC* è un caso particolare, perché è l'unica che giace interamente sul bordo di Ω.
- La regola precedente sulle frazioni volumiche degli strati si applica tuttavia ad una linea qualunque, che passerà in generale all'interno di Ω.
- Ora, un qualunque punto interno a Ω appartiene a infinite linee rette distinte, il che significa che a ciascun punto di laminazione, e dunque a ciascun tensore **A**, corrispondono diversi (in generale infiniti) laminati distinti, come già anticipato.
- Si consideri ad esempio l'origine *O* del piano ξ_1-ξ_2, il punto $\xi_1=\xi_2=0$. si osserva immediatamente dalle formule di pagina 397 che questo corrisponde a tutti e soli i laminati che hanno un comportamento isotropo in membrana. Ma come ottenerli a partire dalle considerazioni precedenti?

Il metodo di Miki

- Il punto *O* appartiene a diversi segmenti, tra cui ad esempio:
  - il segmento *AE*; *O* dista $r\ell$=2/3ℓ da *A* e dunque avrà 2/3 di strati a ±60° e 1/3 a 0°; quindi si ottiene un laminato isotropo in membrana disponendo un numero identico di strati a 0°, 60° e -60° (soluzione di Werren e Norris);
  - il segmento *CD*; il ragionamento è analogo, stavolta si ottiene una soluzione con strati in egual numero a 30°, 90° e -30° (la soluzione precedente ruotata di 30°);
  - il segmento verticale ξ_1=0, che va dal punto (0,1), in cui si ha la stessa quantità di strati a 0° e a 90°, ed il punto *B*, in cui si ha la stessa quantità di strati a ±45°; dal momento che *O* si trova a metà strada tra questi due punti, sarà composto da un numero uguale di strati a 0°, 45°, 90° e -45° (soluzione quasi-isotropa, altro tipo di soluzione di Werren e Norris);
  - il segmento orizzontale ξ_2=0; in questo caso si ottiene facilmente che la soluzione è quella precedente ruotata di 22,5°.

Il metodo di Miki

- Naturalmente, altre combinazioni sono possibili, prendendo in considerazione altri segmenti (cioè, la condizione di Werren e Norris è solo sufficiente per l'isotropia di membrana).
- Ora, un punto di laminazione, come già detto, può rappresentare diversi laminati; tuttavia, dal momento che un punto è definito da due soli parametri, due angoli sono sufficienti per ottenere un laminato con le caratteristiche volute.
- In altre parole, nella classe dei laminati simmetrici ed equilibrati bastano due gruppi di orientazioni, $\pm\delta_1$ e $\pm\delta_2$ per ottenere le caratteristiche di rigidezza in membrana ricercate.
- Allora, una volta individuato il punto di laminazione, basta far passare un segmento da questo punto e trovarne le intersezioni con la frontiera di Ω (sulla quale, si ricorda, si trovano proprio solo le soluzioni di tipo $\pm\delta$, eccetto sul segmento AC); procedendo poi come descritto in precedenza si ottiene una soluzione possibile.

Il metodo di Miki

- Analiticamente, per un laminato con due gruppi di orientazioni, si ha

$$\xi_1 = \nu_1 \cos 2\delta_1 + \nu_2 \cos 2\delta_2, \quad \xi_2 = \nu_1 \cos 4\delta_1 + \nu_2 \cos 4\delta_2.$$

con ovviamente

$$\nu_2 = 1 - \nu_1.$$

- Quindi, sono 3 i parametri da scegliere per ottenere un laminato corrispondente ad un punto di laminazione voluto; dalle equazioni sopra, si possono ricavare due di questi parametri se se ne fissa un terzo.
- Se ad esempio si fissa ν_1, si ottengono le orientazioni nella forma

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\arccos Q_1, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\arccos Q_2,$$

dove

$$Q_1 = \frac{2\nu_1\xi_1 \pm \sqrt{2\nu_1\nu_2(1+\xi_2 - 2\xi_1^2)}}{2\nu_1}, \quad Q_2 = \frac{\xi_1 - \nu_1 Q_1}{\nu_2}.$$

Il metodo di Miki

- Miki ha anche considerato il caso di laminati equilibrati con alcuni strati a 0° (l'ortotropia di membrana si conserva, si constata facilmente).
- In questo caso,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \nu_1 \cos 2\delta_1 + \nu_2 \cos 2\delta_2 + \nu_3, \\ \xi_2 &= \nu_1 \cos 4\delta_1 + \nu_2 \cos 4\delta_2 + \nu_3, \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 &= 1. \end{aligned}$$

- Per una scelta fatta di 2 dei 3 parametri di laminazione, si ottiene

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\arccos\frac{\xi_1 - \nu_2\Theta - \nu_3}{\nu_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\arccos\Theta, \quad \text{dove}$$

$$\Theta = \frac{-K_b \pm \sqrt{K_b^2 - K_a K_c}}{K_a}, \quad K_a = 2\nu_2(\nu_1+\nu_2), \quad K_b = 2\nu_2(\nu_3 - \xi_1),$$

$$K_c = 2\nu_3^2 + 2(\nu_1 - 2\xi_1)\nu_3 - (1+\xi_2)\nu_1 + 2\xi_1^2.$$

Il metodo di Miki

- Si deve comunque tener conto del fatto, da un lato, che non tutti i segmenti passanti per un punto di laminazione possono essere presi in considerazione per ottenere un laminato con le proprietà cercate, dall'altro, che le frazioni volumiche, soprattutto per laminati a basso numero di strati, non sono tutte disponibili, dovendo queste essere delle frazioni del numero totale degli strati, e non dei reali qualsiasi.
- Miki e Sugiyama (1991) hanno generalizzato questo approccio per prendere in considerazione il fatto che il numero degli strati in ogni orientazione è un intero, sostanzialmente individuando a priori sul dominio Ω un reticolo di punti capaci di dar luogo a laminati con frazioni volumiche degli strati derivanti da rapporti tra numeri interi di uso relativamente frequente.

Progetto della rigidezza

- Vediamo adesso come si procede, col metodo di Miki, per la progettazione di un laminato rispondente ad alcuni criteri tipici di progetto, riguardanti i moduli di rigidezza in membrana.
- Innanzitutto, ricordiamo l'espressione dei moduli in membrana per un laminato ortotropo (vedi pagina 331):

$$E_x^m = \frac{1}{\overset{*}{a}_{xx}},\quad E_y^m = \frac{1}{\overset{*}{a}_{yy}},\quad G_{xy}^m = \frac{1}{\overset{*}{a}_{ss}},\quad \nu_{xy}^m = -\frac{\overset{*}{a}_{xy}}{\overset{*}{a}_{xx}}.$$

- Essendo il laminato disaccoppiato (sequenza simmetrica per ipotesi), **a*=A***$^{-1}$ e in definitiva si ottiene

$$E_x^m = \frac{1}{h}\left(A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}}\right),\quad E_y^m = \frac{1}{h}\left(A_{yy} - \frac{A_{xy}^2}{A_{xx}}\right),\quad G_{xy}^m = \frac{A_{ss}}{h},\quad \nu_{xy}^m = \frac{A_{xy}}{A_{yy}}.$$

- In termini di parametri di laminazione si ottiene dunque

Progetto della rigidezza

$$E_x^m(\xi_1,\xi_2) = U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3},$$

$$E_y^m(\xi_1,\xi_2) = U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3},$$

$$G_{xy}^m(\xi_2) = U_5 - \xi_2 U_3, \quad \nu_{xy}^m(\xi_1,\xi_2) = \frac{U_4 - \xi_2 U_3}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U},$$

con i parametri di Tsai e Pagano, mentre col metodo polare è

$$E_x^m(\xi_1,\xi_2) = \frac{8[T_0 T_1 + (-1)^k T_1 R_0 \xi_2 - 2R_1^2 \xi_1^2]}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 - 4R_1 \xi_1},$$

$$E_y^m(\xi_1,\xi_2) = \frac{8[T_0 T_1 + (-1)^k T_1 R_0 \xi_2 - 2R_1^2 \xi_1^2]}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 + 4R_1 \xi_1},$$

$$G_{xy}^m(\xi_2) = T_0 - (-1)^k R_0 \xi_2, \quad \nu_{xy}^m(\xi_1,\xi_2) = -\frac{T_0 - 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 - 4R_1 \xi_1}.$$

Progetto della rigidezza

- La massimizzazione della rigidezza in direzione *x*, ad esempio, corrisponde dunque al problema di minimo in forma standard seguente:

$$\min \; -E_x^m(\xi_1,\xi_2) = -\left[U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3}\right]$$

$$\text{con} \quad \xi_1 - 1 \le 0, \quad -\xi_1 - 1 \le 0, \quad \xi_2 - 1 \le 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \le 0.$$

- Con i parametri polari si ha

$$\min \; -E_x^m(\xi_1,\xi_2) = -\frac{8[T_0 T_1 + (-1)^k T_1 R_0 \xi_2 - 2R_1^2 \xi_1^2]}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 - 4R_1 \xi_1}$$

$$\text{con} \quad \xi_1 - 1 \le 0, \quad -\xi_1 - 1 \le 0, \quad \xi_2 - 1 \le 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \le 0.$$

- Questo problema ha senso soltanto se si aggiungono altre condizioni, ad esempio su un minimo della rigidezza trasversale, altrimenti la soluzione è ben nota, si devono semplicemente disporre tutti gli strati con le fibre in direzione *x*.

Progetto della rigidezza

- La funzione da minimizzare non è lineare, ed è convessa nello spazio dei parametri di laminazione ma non nello spazio delle orientazioni (vedi le formule di pagina 401).
- La soluzione di questo problema necessita, in generale, di un approccio numerico.

- Più semplice è il progetto di un laminato avente il modulo a taglio massimo.
- Si tratta di risolvere il problema di minimo in forma standard

$$\min \ -G_{xy}^m(\xi_2) = \xi_2 U_3 - U_5$$

$$\text{con} \quad \xi_1 - 1 \le 0, \quad -\xi_1 - 1 \le 0, \quad \xi_2 - 1 \le 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \le 0.$$

- Questo problema non è lineare, ma la soluzione si trova sul bordo del dominio ammissibile, perché la funzione obiettivo è lineare; si vede immediatamente che il laminato che massimizza la rigidezza a taglio in membrana è del tipo

Progetto della rigidezza

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = -1 \quad \text{se} \quad U_3 > 0 \quad \text{sequenza } \textit{angle-ply} \text{ di tipo} \pm 45°;$$
$$\xi_1 = \text{qualunque}, \xi_2 = 1 \quad \text{se} \quad U_3 < 0 \quad \text{sequenza } \textit{cross-ply}.$$

- Normalmente U_3>0, e dunque è una sequenza di tipo ±45° che generalmente massimizza la rigidezza a taglio in membrana.
- Con il metodo polare, si sarebbe ottenuto:

$$\min \ -G_{xy}^m(\xi_2) = -T_0 + (-1)^k R_0 \xi_2$$

$$\text{con} \quad \xi_1 - 1 \le 0, \quad -\xi_1 - 1 \le 0, \quad \xi_2 - 1 \le 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \le 0.$$

- La soluzione è dunque

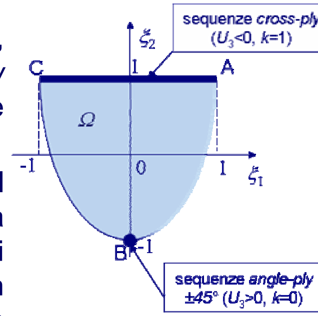
$$\xi_1 = 0, \xi_2 = -1 \quad \text{se} \quad k = 0 \quad \text{sequenza } \textit{angle-ply} \text{ di tipo} \pm 45°;$$
$$\xi_1 = \text{qualunque}, \xi_2 = 1 \quad \text{se} \quad k = 1 \quad \text{sequenza } \textit{cross-ply}.$$

- In entrambi i casi,

$$\max G_{xy}^m = T_0 + R_0 \quad (= U_3 + U_5).$$

Progetto della rigidezza

- In effetti, il caso di un materiale con U_3>0, k=0, è quello che Pedersen chiama un *low shear modulus material*, mentre U_3<0, k=1, è un *high shear modulus material*.
- In quest'ultimo caso, la rigidezza a taglio del laminato è massimizzata ponendo gli strati a 0° e 90°, secondo una percentuale qualsiasi (infinite soluzioni teoriche): la sequenza non influisce sul valore finale della rigidezza a taglio in membrana.



- Un problema diverso, e più semplice, è quello di determinare un laminato avente un modulo dato.
- In questo caso, è utile tracciare le curve di isovalori dei moduli, che si ricavano dalle funzioni di pagina 413:

Progetto della rigidezza

$$\xi_2=\frac{U_2\xi_1^2-U_2E_x^m\xi_1+E_x^mU_1-U_1^2+U_4^2}{U_3(2U_1+2U_4-E_x^m)}\qquad \text{curve di isovalori di } E_x^m,$$

$$\xi_2=\frac{U_2\xi_1^2+U_2E_y^m\xi_1+E_y^mU_1-U_1^2+U_4^2}{U_3(2U_1+2U_4-E_x^m)}\qquad \text{curve di isovalori di } E_y^m,$$

$$\xi_2=\frac{U_5-G_{xy}^m}{U_3}\qquad \text{curve di isovalori di } G_{xy}^m,$$

$$\xi_2=\frac{\nu_{xy}^mU_2\xi_1-\nu_{xy}^mU_1+U_4}{U_3(1+\nu_{xy}^m)}\qquad \text{curve di isovalori di } \nu_{xy}^m.$$

- Con i parametri polari si ottiene

Progetto della rigidezza

$$\xi_2 = \frac{(T_0 + 2T_1 - 4R_1\xi_1)E_x^m - 8T_0T_1 + 16R_1^2\xi_1^2}{(-1)^k R_0(8T_1 - E_x^m)} \qquad \text{curve di isovalori di } E_x^m,$$

$$\xi_2 = \frac{(T_0 + 2T_1 + 4R_1\xi_1)E_y^m - 8T_0T_1 + 16R_1^2\xi_1^2}{(-1)^k R_0(8T_1 - E_y^m)} \qquad \text{curve di isovalori di } E_y^m,$$

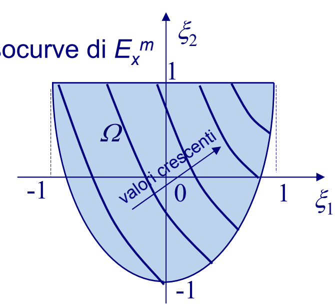
$$\xi_2 = \frac{T_0 - G_{xy}^m}{(-1)^k R_0} \qquad \text{curve di isovalori di } G_{xy}^m,$$

$$\xi_2 = \frac{2T_1 - T_0 - (T_0 + 2T_1 - 4R_1\xi_1)\nu_{xy}^m}{(-1)^k R_0(1 + \nu_{xy}^m)} \qquad \text{curve di isovalori di } \nu_{xy}^m.$$

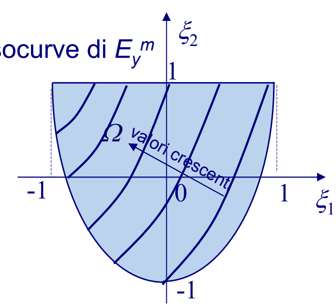
- Le figure seguenti mostrano l'andamento qualitativo delle isocurve dei moduli dell'ingegnere in membrana.

Progetto della rigidezza

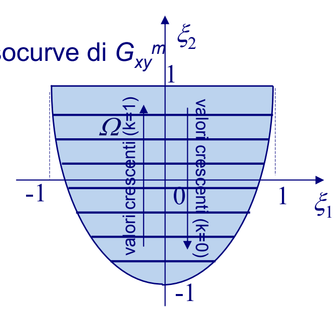
Isocurve di $E_x{}^m$



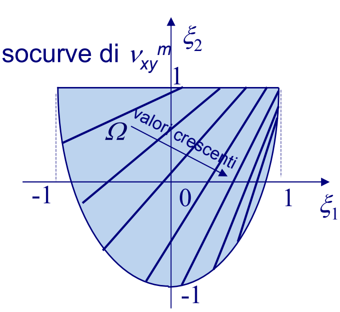
Isocurve di $E_y{}^m$



Isocurve di $G_{xy}{}^m$



Isocurve di $\nu_{xy}{}^m$



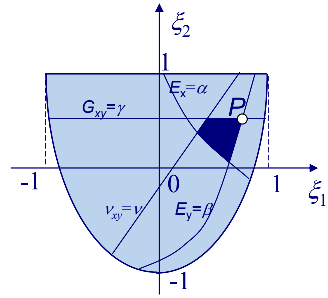
Progetto della rigidezza

- Vediamo con alcuni esempi come si applica il metodo di Miki.
- Esempio 1 (Miki): si vuole progettare un laminato tale che:

  E_x^m sia massimo,

  con le condizioni:

  $E_x^m>\alpha$, $E_y^m>\beta$, $G_{xy}^m>\gamma$, $\nu_{xy}^m<\nu$.



- Si sceglie allora un materiale di base per cui il dominio ammissibile, definito dalle condizioni qui sopra, sia contenuto in Ω.
- Si conosce dunque la regione di Ω cui il punto di laminazione deve appartenere. Tramite le isocurve di E_x^m, si riconosce che il punto di ottimo è allora il punto P in figura (se $U_3>0$, $k=0$).
- Si conoscono adesso i parametri di laminazione della soluzione e per determinare le orientazioni si procede come visto in precedenza.

Progetto della rigidezza

- Esempio 2 (Gürdal, Haftka, Hajela): progettare un laminato con strati in carbonio-epoxy (E_1= 128 GPa, E_2= 13 GPa, G_{12}= 6.4 GPa, ν_{12}=0.3) tale da massimizzare E_x^m e da rispettare le condizioni seguenti: $G_{xy}^m\geq 25$ GPa, $\nu_{xy}^m\leq 1$.
- Calcoliamo dapprima i parametri di Tsai e Pagano (o quelli polari) per lo strato di base: si ottiene (formule di pagina 156 e 393)

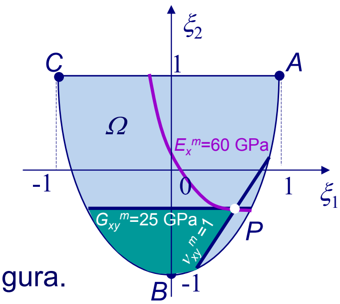
$$U_1 = 57.547 \text{ GPa},\quad U_2 = 58.030 \text{ GPa},\quad U_3 = 13.604 \text{ GPa},$$
$$U_4 = 17.540 \text{ GPa},\quad U_5 = 20.004 \text{ GPa},$$

oppure

$$T_0 = 20 \text{ GPa},\quad T_1 = 18.772 \text{ GPa},\quad R_0 = 13.604 \text{ GPa},$$
$$R_1 = 14.508 \text{ GPa},\quad \Phi_0 = \Phi_1 = 0° \ (\rightarrow k = 0).$$

- Determiniamo il dominio ammissibile in Ω: le rette che corrispondono alle due condizioni sono nell'ordine

Progetto della rigidezza



$$\xi_2 = -0.3673,$$
$$\xi_2 = 2.1328\,\xi_1 - 1.4704.$$

- Il dominio ammissibile è rappresentato in figura.
- Allora, ricordando l'andamento delle isocurve di E_x^m, si ricava che il punto di laminazione che massimizza E_x^m sotto le condizioni poste è il punto P=(0.5172, − 0.3672).
- Si può dunque calcolare (ad esempio tramite le formule di pagina 413) il valore di E_x^m ottenuto; si ricava E_x^m=60 GPa.
- Resta soltanto da decidere come ottenere il laminato che ha queste caratteristiche. Per far questo, si può seguire il procedimento analitico di pagina 409. Se si prende ν_1=0.5, si ottiene facilmente

$$\delta_1 = 21.20°, \quad \delta_2 = 36.39°.$$

Progetto della rigidezza

- Quindi, il laminato è composto da una sequenza simmetrica di un ugual numero di strati disposti secondo le orientazioni ±21.20°, ±36.39°. Il minimo numero di strati è dunque 8.

- Altri problemi di progetto delle proprietà di membrana possono essere trattati nello stesso modo, tra cui, ad esempio, quello della progettazione dei coefficienti di espansione termica.

- Più difficile è la progettazione della rigidezza in flessione. In tal caso infatti le formule di pagina 396 mostrano che nella definizione dei parametri di laminazione entrano anche i coefficienti d_k, e dunque la posizione dello strato sulla sequenza di impilamento.
- Inoltre, si è già detto della difficoltà di ottenere allo stesso tempo il disaccoppiamento membrana-flessione e l'ortotropia in flessione.

Progetto della rigidezza

- Questo vuol dire che, *a priori*, non si possono ritenere nulli i termini D_{xs} e D_{ys}, e dunque che si dovrebbe lavorare con 4 parametri di laminazione e non con 2. In definitiva, l'approccio di Miki, a rigore, non è più possibile in flessione.
- Per ovviare a questo inconveniente e continuare ad utilizzare un metodo del tipo di quello di Miki, molti autori fanno l'ipotesi che i termini D_{xs} e D_{ys}, pur se presenti, siano trascurabili.
- In sostanza, considerano il laminato come ortotropo in flessione, ma si deve precisare che questa assunzione non ha fondamento scientifico preciso, e non è escluso che, *a posteriori*, le componenti D_{xs} e D_{ys} si rivelino di valore consistente.
- Con questo approccio, ci si riduce a considerare solo i parametri di laminazione ξ_9 e ξ_{10}, per i quali valgono delle limitazioni analoghe a ξ_1 e ξ_2 (Miki, 1985):

$$-1 \le \xi_9 \le 1, \quad 2\xi_9^2 - 1 \le \xi_{10} \le 1.$$

Progetto della rigidezza

- Le considerazioni fatte nel caso del comportamento di membrana si possono quindi fare anche nel caso della flessione; in particolare, i parametri di laminazione possono essere riscritti, per un laminato equilibrato, come

$$\xi_9 = \sum_{k=1}^{n_g} s_k \cos 2\delta_k,$$

$$\xi_{10} = \sum_{k=1}^{n_g} s_k \cos 4\delta_k,$$

$$s_k = \frac{\sum_{j=1}^{n_k} d_j}{n^3},$$ somma estesa agli n_k strati del gruppo di orientazione k.

- Si verifica facilmente che vale ancora la regola per cui la somma degli s_k è uguale all'unità.
- In particolare, se si prendono solo due gruppi di orientazioni, $\pm\delta_1$ e $\pm\delta_2$, allora si ottiene una soluzione identica a quella di pagina 409, laddove si sostituiscano ξ_1 e ξ_2 con ξ_9 e ξ_{10}.

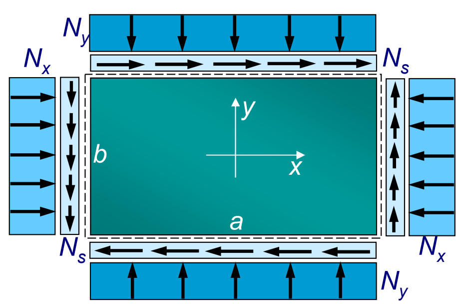
Progetto della rigidezza

- Il progetto della rigidezza flessionale è necessario anche in due circostanze importanti: il progetto rispetto al carico critico di stabilità o rispetto alle frequenze proprie.
- In entrambi i casi, si deve specificare la geometria e le condizioni di vincolo della piastra, e per il caso del carico critico anche il tipo di sollecitazione di membrana (in genere, un carico agente nel piano medio della lastra e sul suo contorno).
- Le soluzioni di cui si dispone riguardano in genere le piastre rettangolari ortotrope in flessione, con assi di ortotropia paralleli ai lati della piastra.
- Questa sembra essere una condizione indispensabile per poter ottenere una soluzione analitica (in forma chiusa o in forma di serie) a qualunque problema di piastra anisotropa; non esistono infatti soluzioni analitiche di nessun tipo per piastre rettangolari ortotrope fuori asse; in definitiva, la presenza dei termini di accoppiamento flessione-torsione, D_{xs} e D_{ys}, preclude, apparentemente, la possibilità di trovare una soluzione analitica.

Progetto della rigidezza

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

- Nel caso del progetto del carico critico di stabilità, se N_s=0 e se il carico è applicato solo sul bordo (vedi figura), per una piastra appoggiata sul contorno si può esprimere la freccia come



$$w_0 = a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b},$$

dove m e n sono il numero di semi-onde, rispettivamente in direzione x e y, della deformata sinusoidale della piastra per perdita di stabilità.

- La piastra si considera essere disaccoppiata (per esempio per la simmetria della sequenza) e ortotropa (eventualmente perché si considerano nulli D_{xs} e D_{ys}). Come visto, questa ipotesi è, il più delle volte, una approssimazione, eventualmente da verificare *a posteriori*.

Progetto della rigidezza

- In tali ipotesi, si conosce il valore del moltiplicatore critico di stabilità λ del carico **N**=(N_x, N_y, 0), vedi capitolo seguente:

$$\lambda = \pi^2 \frac{D_{xx}\dfrac{m^4}{a^4} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\dfrac{m^2}{a^2}\dfrac{n^2}{b^2} + D_{yy}\dfrac{n^4}{b^4}}{N_x\dfrac{m^2}{a^2} + N_y\dfrac{n^2}{b^2}}.$$

- Si nota che λ dipende dall'anisotropia di flessione e dal rapporto a/b; è quindi impossibile dire a priori a quale forma modale corrisponde il carico critico più piccolo.
- Normalmente, si vuole massimizzare λ; quindi, per ogni forma modale cioè per ogni scelta di m e n, si deve massimizzare la funzione

$$f = D_{xx}\alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\alpha\beta + D_{yy}\beta^2, \quad \alpha = \frac{m^2}{a^2},\ \beta = \frac{n^2}{b^2}.$$

Progetto della rigidezza

- Utilizzando i parametri di laminazione, si ha, per ogni forma modale, il seguente problema di ottimo in forma standard

$$\begin{aligned}\min f(\xi_9,\xi_{10}) = -[&U_1(\alpha^2+\beta^2) + 2\alpha\beta(U_4+2U_5) + \\ &+ \xi_9 U_2(\alpha^2-\beta^2) + \xi_{10}U_3(\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2)]\end{aligned}$$

$$\text{con} \quad \xi_9 - 1 \le 0, \quad -1-\xi_9 \le 0, \quad \xi_{10}-1 \le 0, \quad \xi_9^2 - \xi_{10} - 1 \le 0.$$

- Con i parametri polari si ottiene invece

$$\min f(\xi_9,\xi_{10}) = -(T_0+2T_1)(\alpha+\beta)^2 - 4R_1\xi_9\left(\alpha^2-\beta^2\right) - (-1)^k R_0\xi_{10}\left(\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2\right)$$

$$\text{con} \quad \xi_9 - 1 \le 0, \quad -1-\xi_9 \le 0, \quad \xi_{10}-1 \le 0, \quad \xi_9^2 - \xi_{10} - 1 \le 0.$$

- Si nota che la funzione da minimizzare dipende linearmente da ξ_9 e ξ_{10} ed il problema è convesso nello spazio dei parametri di laminazione.

Progetto della rigidezza

- La funzione $f(\xi_9\ ,\ \xi_{10})$ descrive quindi un piano (le sue isocurve sono dunque delle rette parallele) e questo implica che il massimo si trova sul bordo di Ω: i laminati che massimizzano il carico critico sono dei laminati *angle-ply*.
- Si deve tuttavia ricordare che il più delle volte queste soluzioni sono approssimate, per quanto detto in precedenza; la valutazione dei valori dei termini D_{xs} e D_{ys} è importante, e dovrebbe considerare la perturbazione del carico critico provocata dalla loro eventuale presenza.

- Per quanto riguarda il progetto delle frequenze proprie, consideriamo solo il caso in cui si voglia massimizzare la prima frequenza propria, e per una piastra rettangolare, di massa unitaria μ, appoggiata sul contorno, ortotropa negli assi x e y, a sequenza simmetrica; insomma, lo stesso tipo di piastra già considerato per il caso del carico critico.

Progetto della rigidezza

- Si cerca normalmente una soluzione nella forma

$$w_0 = a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\omega_{mn} t.$$

- In tal caso, le frequenze proprie sono date da (capitolo seguente)

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{\mu}\left[D_{xx}\alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\alpha\beta + D_{yy}\beta^2\right]$$

- Per massimizzare la frequenza di un certo modo si deve dunque massimizzare la stessa funzione che rende estremo il carico critico dello stesso modo: i laminati che massimizzano il carico critico di un modo massimizzano dunque anche la frequenza corrispondente.

Progetto della resistenza

- Il progetto della resistenza è più complicato di quello della rigidezza, per vari motivi.
- Innanzitutto, si deve specificare una situazione di carico, ed in generale questa dipende da almeno 6 parametri, le componenti di **M** ed **N** (escludendo per semplicità le sollecitazioni di altra natura, come quelle termiche).
- In seguito, si deve poter risalire dalle sollecitazioni ai limiti ammissibili, e questo per ciascuno strato, non potendosi sapere *a priori* quale sia lo strato più sollecitato.
- Inoltre, questo comporta la scelta di un criterio di resistenza, e questi non sono equivalenti, soprattutto dal punto di vista del calcolo.
- I metodi per il progetto in resistenza sono dunque meno ben stabiliti che quelli in rigidezza.
- Qui di seguito, si fa solo un cenno ad una applicazione possibile del metodo di Miki anche al caso del progetto della resistenza.

Progetto della resistenza

- Consideriamo dunque il caso di un laminato equilibrato, simmetrico, sollecitato solo nel suo piano (**M**=**O**).
- Le deformazioni negli strati sono le medesime, e date in questo caso dalla relazione

$$\boldsymbol{\varepsilon}^o = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{N}.$$

- D'altra parte, **A** è funzione dei parametri di laminazione ξ_1 e ξ_2, pagina 391 e 397, e dunque svolgendo i calcoli con i parametri di Tsai e Pagano si trova

$$\varepsilon_x^o = \frac{1}{h}\frac{(U_1 - U_2\xi_1 + U_3\xi_2)N_x - (U_4 - U_3\xi_2)N_y}{(U_1^2 - U_4^2) - U_2^2\xi_1^2 + 2U_3(U_1 + U_4)\xi_2},$$

$$\varepsilon_y^o = \frac{1}{h}\frac{(U_1 + U_2\xi_1 + U_3\xi_2)N_y - (U_4 - U_3\xi_2)N_x}{(U_1^2 - U_4^2) - U_2^2\xi_1^2 + 2U_3(U_1 + U_4)\xi_2},$$

$$\varepsilon_s^o = \frac{1}{h}\frac{N_s}{U_5 - U_3\xi_2}.$$

Progetto della resistenza

- Con i parametri polari si ottiene invece

$$\varepsilon_x^o = \frac{1}{8h}\frac{(T_0+2T_1-4R_1\xi_1+(-1)^k R_0\xi_2)N_x+(T_0-2T_1+(-1)^k R_0\xi_2)N_y}{T_0T_1-2R_1^2\xi_1^2+(-1)^k R_0T_1\xi_2},$$

$$\varepsilon_y^o = \frac{1}{8h}\frac{(T_0+2T_1+4R_1\xi_1+(-1)^k R_0\xi_2)N_y+(T_0-2T_1+(-1)^k R_0\xi_2)N_x}{T_0T_1-2R_1^2\xi_1^2+(-1)^k R_0T_1\xi_2},$$

$$\varepsilon_s^o = \frac{1}{h}\frac{N_s}{T_0-(-1)^k R_0\xi_2}.$$

- Queste componenti tensoriali della deformazione devono in seguito essere trasformate, per ciascuno strato, al fine di esprimerle nel riferimento materiale dello strato, ruotato in senso trigonometrico di un angolo δ_k rispetto al riferimento globale del laminato.
- Questo si fa utilizzando le formule di pagina 160:

Progetto della resistenza

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc\\ s^2 & c^2 & -sc\\ -2sc & 2sc & c^2-s^2\end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix}\varepsilon_x^o\\ \varepsilon_y^o\\ \varepsilon_s^o\end{Bmatrix},\quad c=\cos\delta_k,\quad s=\sin\delta_k.$$

- Consideriamo per semplicità solo il caso di un laminato equilibrato con due soli possibili gruppi di orientazioni, $\pm\delta_1$ e $\pm\delta_2$.
- In tal caso, ricordando le formule di pagina 409, si ottengono con alcune trasformazioni le espressioni delle componenti di deformazione nei due gruppi di strati

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \frac{1+Q_k}{2} & \frac{1-Q_k}{2} & \frac{\sin(\arccos Q_k)}{2}\\ \frac{1-Q_k}{2} & \frac{1+Q_k}{2} & -\frac{\sin(\arccos Q_k)}{2}\\ -\sin(\arccos Q_k) & \sin(\arccos Q_k) & Q_k\end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix}\varepsilon_x^o\\ \varepsilon_y^o\\ \varepsilon_s^o\end{Bmatrix},\quad k=1,2.$$

Progetto della resistenza

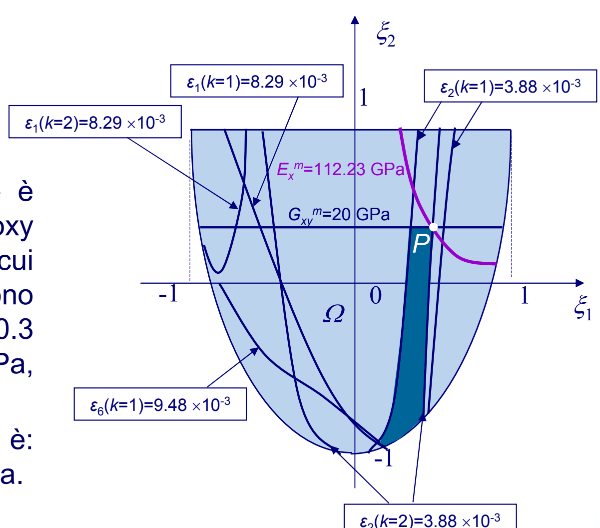
- Adesso, si possono ricavare le tensioni in ciascuno strato (per le ipotesi fatte, la matrice [Q] è la stessa per ogni strato):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_6\end{Bmatrix}_k=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}_k .$$

- Disponendo delle tensioni nei due gruppi di strati, si possono rappresentare nel piano dei parametri di laminazione, ξ_1 e ξ_2, dei limiti imposti sulle tensioni massime (criterio della tensione massima), o su una loro combinazione (criteri di Tsai-Hill, Hoffmann, Tsai-Wu), o fermandosi alle deformazioni, i limiti propri al criterio della deformazione massima.
- In tal modo, si definisce sul dominio Ω una regione ammissibile, eventualmente determinata anche da altre condizioni, ad esempio sulla rigidezza, nella quale si può determinare un punto di laminazione ottimale per un dato problema (per esempio, E_x^m max).

Progetto della resistenza

- A titolo di esempio, si riporta il caso seguente (Gürdal, Haftka, Hajela): si deve massimizzare E_x^m con le condizioni:
  - $G_{xy}^m \geq 20$ GPa;
  - $\varepsilon_1 \leq 8.29 \times 10^{-3}$;
  - $\varepsilon_2 \leq 3.88 \times 10^{-3}$;
  - $\varepsilon_6 \leq 9.48 \times 10^{-3}$.



- Il materiale di base è un carbonio-epoxy T300-5208, le cui caratteristiche sono E_1= 181 GPa, E_2= 10.3 GPa, G_{12}= 7.17 GPa, ν_{12}=0.28.
- La sollecitazione è: **N**/h={0.5, 0.25,0} GPa.

Progetto della resistenza

- Le curve rappresentanti i vari vincoli sono mostrate nella figura precedente; il dominio ammissibile è indicato in blu scuro, ed il punto di laminazione che massimizza E_x^m è il punto P= (0.397, 0.349), per il quale si ottiene, per ν_1=0.4, Q_1= –0.4842 e Q_2=0.9838, da cui i due angoli del primo gruppo (40% degli strati) δ_1=±59.48° e del secondo (60% degli strati) δ_2=±5.16°.
- Per il modulo di Young, si ottiene il valore E_x^m= 112.23 GPa.
- Una soluzione possibile è un 20 strati simmetrico, con 8 strati nel primo gruppo e 12 nel secondo, in modo da rispettare la condizione di laminato equilibrato e le frazioni volumiche degli strati, ad esempio

$$[\delta_1/-\delta_1/\delta_2/-\delta_2/\ \delta_2/-\delta_2/\ \delta_2/-\delta_2/-\delta_1/\delta_1]_s.$$

Approcci numerici moderni

- Il breve panorama dei metodi di progetto presentato permette di mettere in evidenza alcuni punti critici di questi metodi classici.
- Il più importante, è che in effetti *quasi mai si cerca una autentica soluzione ottimale a un dato problema*.
- In effetti, la scelta di cercare la soluzione in una classe particolare di laminati (soprattutto gli equilibrati simmetrici) restringe drasticamente lo spazio di ricerca, eliminando alla base delle soluzioni possibili, spesso le vere soluzioni ottimali.
- D'altra parte, come si è visto, questa strategia è utilizzata per due ragioni fondamentali: da un lato, per ridurre la complicazione del problema (per esempio, perché permette di limitare il numero delle variabili di progetto), dall'altro, per assicurarsi *a priori* alcune caratteristiche meccaniche di difficile progettazione e formalizzazione matematica in un problema di ottimo.
- Queste assunzioni hanno dei risvolti importanti, soprattutto per la progettazione in flessione, per la quale quasi tutte le soluzioni

Approcci numerici moderni

disponibili in letteratura, ad esempio per il carico critico, sono in principio approssimate (perché si trascura il progetto di D_{xs} e D_{ys}).

- Vista la complessità del problema di progetto di un laminato, la via più indicata è quella di utilizzare dei metodi propri all'ottimizzazione strutturale.
- In tal modo, è possibile formalizzare in modo classico, nell'ambito di questa disciplina, un problema di progetto che permetta di prendere in conto non soltanto l'obiettivo primo della progettazione (ad esempio, la massimizzazione della rigidezza), ma anche i requisiti sulle simmetrie elastiche (disaccoppiamento, ortotropia in membrana e/o in flessione etc.) che normalmente fanno parte integrante del progetto di un laminato.
- Questi requisiti possono essere formalizzati sia sotto forma di vincoli imposti alla ricerca dell'ottimo, sia, in alcuni casi, come parte integrante della funzione obiettivo.

Approcci numerici moderni

- In altre parole, si può parlare oggi di *ottimizzazione globale* di un laminato.
- Questa prospettiva è permessa in gran parte dalle tecniche moderne di ottimizzazione.
- Non si deve infatti dimenticare che la complessità intrinseca dei problemi che si incontrano nella progettazione dei laminati (funzioni obiettivo non convesse con un numero elevato di variabili di progetto), comporta che il più delle volte si ha a che fare con problemi di minimo aventi una grande molteplicità di soluzioni (minimi assoluti e non), a volte con veri e propri domini di soluzioni (soluzioni non isolate).
- Inoltre spesso, per consuetudini costruttive, si limitano le orientazioni possibili ad un insieme piuttosto ristretto di angoli (per esempio, 0°, 90°, ±45°), e quindi si deve operare con variabili discrete.

Approcci numerici moderni

- Queste difficoltà sono affrontate dalle tecniche moderne di ottimizzazione, che possono trattare con successo problemi non convessi, di grandi dimensioni e con variabili di ogni tipo: sono le cosiddette *metaeuristiche di ottimizzazione*.
- Si tratta di algoritmi capaci di trattare problemi complicati ispirandosi non alle tecniche matematiche classiche (discesa verso il minimo di un "individuo", guidato dalle "informazioni" date dalla funzione obiettivo), ma ad altre leggi della natura, provenienti da diversi contesti:
  - metallurgico: metodo del *simulated annealing*;
  - sociologico: metodo tabu;
  - biologico: algoritmi genetici o evoluzionari, metafore immunologiche, *particle swarm optimization*, colonie di formiche, reti neurali etc.
- I metodi applicati con più successo nel campo della progettazione dei laminati sono il metodo del *simulated annealing* e gli algoritmi genetici.

Approcci numerici moderni

- In questi algoritmi, si fa evolvere, con un criterio di selezione ispirato dalla funzione obiettivo, una popolazione di "individui" candidati a essere soluzione del problema dato.
- Sono metodi di ordine 0 (nessun bisogno di calcolare le derivate della funzione obiettivo) e quindi ben adatti a rappresentare qualunque tipo di variabile, continua o discreta.
- Per il fatto poi che lavorano non su un solo "individuo" ma su tutta una popolazione, aggirano alla base, statisticamente, il problema della non convessità, ed il rischio dunque di convergere verso soluzioni non ottimali (minimi locali).
- Per questa ragione si prestano molto bene a trattare dei problemi di progettazione ottimale dei laminati, per i quali la funzione obiettivo è sempre una combinazione di funzioni trigonometriche delle orientazioni, e quindi fortemente non convessa.
- Molti studi sono stati condotti recentemente da diversi studiosi, come Haftka, Gürdal, Hajela, Le Riche, Grédiac etc.

Approcci numerici moderni

- In questi studi, i problemi abbordati coprono uno spettro molto più vasto di quello, ristretto, visto nei paragrafi precedenti, e questo è possibile grazie al punto di vista totalmente diverso: si formalizza un problema di minimo e se ne cerca la soluzione con una metaeuristica.
- Tuttavia, in diversi di questi studi, si resta ancorati a scelte fatte *a priori*, e volte a garantire l'esistenza delle simmetrie elastiche desiderate.
- Studi più recenti (Vannucci & Vincenti, etc.), basati su una generalizzazione radicale del problema di progetto di un laminato come problema di minimo, permettono di ottenere la più grande generalità nella ricerca delle soluzioni ottimali e di affrancarsi dunque dai vincoli classici che si impongono generalmente al progetto di un laminato (tipicamente, la simmetria della soluzione).
- A titolo di esempio, si mostra il caso di un laminato a 12 strati in carbonio-epoxy T300-5208 (pagina 438), con **B**=**O**, **A** ortotropo e

Approcci numerici moderni

tale da rispettare le condizioni seguenti: $E^m_{max}\geq 100$ GPa (0.55 E_1) e $E^m_{min}\geq 40$ GPa (3.88 E_2). In aggiunta, le orientazioni devono essere dei multipli di 15° (Vannucci e Vincenti).

- Il problema è stato risolto con un algoritmo genetico; la soluzione è
  [0°/30°/–15°/15°/90°/–75°/0°/45°/–75°/0°/–15°/15°].
- In figura, si riporta il grafico direzionale di E^m e E^f e la variazione, durante le generazioni (50 in totale) di E^m_{min} e E^m_{max}.