Capitolo 8

- **Teorie e soluzioni per laminati e piastre sandwich**

Introduzione

- Da quanto visto sinora, la teoria classica dei laminati concerne essenzialmente la riduzione del comportamento del laminato ad un monostrato equivalente.
- Il comportamento del laminato è descritto, come visto, da tre tensori, **A**, **B** e **D**; quando questi siano noti, se si accettano le ipotesi di base della teoria classica, l'analisi della risposta meccanica di un laminato si riconduce a quella del monostrato equivalente.
- Per esso, si possono allora adottare i metodi classici di analisi delle piastre anisotrope, considerando però l'eventuale presenza dell'accoppiamento membranale-flessionale.
- Questa parte viene rapidamente richiamata nei primi tre paragrafi di questo capitolo, per l'analisi statica dapprima e per quella dinamica e di stabilità dopo, insieme ad un cenno a metodi tradizionali di soluzione in forma analitica.
- Tuttavia, si è già avuto modo in precedenza di sottolineare le inconsistenze della teoria classica, che è densa di paradossi

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

Introduzione

meccanici, di cui il più importante è forse l'impossibilità di predire le tensioni da taglio, la cui esistenza è necessaria per l'equilibrio in caso di azioni applicate normali al piano medio.

- Nei due paragrafi seguenti, si introduce dapprima il modo con cui si può completare, in alcuni casi, la teoria classica al fine di includere nel calcolo le tensioni tangenziali in direzione ortogonale al piano medio, e si dà poi un cenno al problema delle tensioni al bordo libero, importanti nella meccanica dei laminati in quanto possono dar luogo al fenomeno della delaminazione.
- L'esistenza di queste tensioni ai bordi liberi mette ancor più in evidenza i limiti della teoria classica dei laminati.
- Si procede allora, nei paragrafi successivi, ad una breve presentazione delle teorie di ordine superiore per i laminati e le piastre sandwich, terminando con la soluzione tridimensionale esatta di Pagano.
- Per ragioni di spazio, questo capitolo non può scendere nei dettagli delle diverse teorie, per i quali si rimanda ai testi specializzati.

Equazioni di equilibrio di un laminato

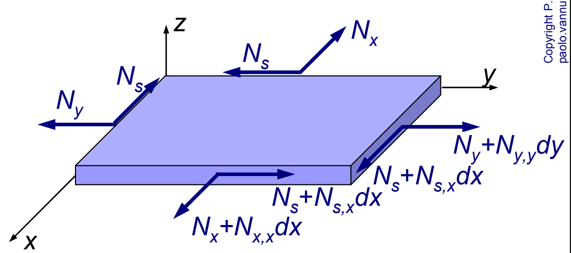
- Consideriamo un elemento infinitesimo di piastra, soggetto alle azioni interne di figura e a sole azioni esterne ortogonali al piano medio $p(x, y)$.
- Rispetto alla teoria classica, volendo qui trovare le equazioni di equilibrio, si devono anche introdurre le risultanti, per unità di lunghezza, delle azioni di taglio, normalmente indicate, in meccanica dei laminati, con Q_x e Q_y e definite come

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zx} dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zy} dz \end{Bmatrix}.$$

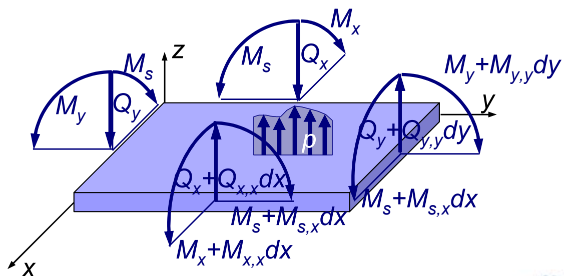
- Con riferimento alle figure seguenti, le equazioni di equilibrio nelle tre direzioni e alla rotazione attorno ai due assi si scrivono facilmente e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si ottiene (le virgole indicano derivazione):

Equazioni di equilibrio di un laminato

$$
\begin{aligned}
N_{x,x} + N_{s,y} &= 0,\\
N_{s,x} + N_{y,y} &= 0,\\
Q_{x,x} + Q_{y,y} &= -p,\\
M_{x,x} + M_{s,y} &= Q_x,\\
M_{s,x} + M_{y,y} &= Q_y.
\end{aligned}
$$



- Le ultime due equazioni definiscono le risultanti delle forze di taglio, anche qualora queste non siano ricavabili in termini di tensioni, come nella teoria classica.



Equazioni di equilibrio di un laminato

- Sostituendo le ultime due equazioni in quella di equilibrio secondo *z*, la terza, si ottiene

$$M_{x,xx} + 2M_{s,xy} + M_{y,yy} = -p.$$

- Le condizioni al contorno riguardano il dato meccanico (le risultanti) o quello cinematico (gli spostamenti duali).
- Se adesso si introduce un modello cinematico ed un legame costitutivo, si possono legare le risultanti alle componenti di spostamento ed esprimere così le equazioni di equilibrio in termini di queste ultime.
- In particolare, prendendo il modello di Kirchhoff, quello della teoria classica, il legame tra risultanti e componenti di spostamento è dato dalla legge fondamentale dei laminati:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix},$$

Equazioni di equilibrio di un laminato

che esplicitata in funzione delle componenti di spostamento del piano medio è

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ \hline M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} & B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} & B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} & D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} & D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y}+v_{0,x} \\ \hline -w_{0,xx} \\ -w_{0,yy} \\ -2w_{0,xy} \end{Bmatrix}.$$

- La sostituzione di queste relazioni nelle equazioni di equilibrio fornisce la generalizzazione completa, nell'ambito della teoria classica dei laminati, delle equazioni delle piastre inflesse sottili di Germain-Lagrange (1811):

Equazioni di equilibrio di un laminato

$$\begin{gathered} A_{xx}u_{0,xx}+2A_{xs}u_{0,xy}+A_{ss}u_{0,yy}+A_{xs}v_{0,xx}+(A_{xy}+A_{ss})v_{0,xy}+A_{ys}v_{0,yy}- \\ -B_{xx}w_{0,xxx}-3B_{xs}w_{0,xxy}-(B_{xy}+2B_{ss})w_{0,xyy}-B_{ys}w_{0,yyy}=0, \\ A_{xs}u_{0,xx}+(A_{xy}+A_{ss})u_{0,xy}+A_{ys}u_{0,yy}+A_{ss}v_{0,xx}+2A_{ys}v_{0,xy}+A_{yy}v_{0,yy}- \\ -B_{xs}w_{0,xxx}-(B_{xy}+2B_{ss})w_{0,xxy}-3B_{ys}w_{0,xyy}-B_{yy}w_{0,yyy}=0, \\ D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}+4D_{xs}w_{0,xxxy}+4D_{ys}w_{0,xyyy}- \\ -B_{xx}u_{0,xxx}-3B_{xs}u_{0,xxy}-(B_{xy}+2B_{ss})u_{0,xyy}-B_{ys}u_{0,yyy}- \\ -B_{xs}v_{0,xxx}-(B_{xy}+2B_{ss})v_{0,xxy}-3B_{ys}v_{0,xyy}-B_{yy}v_{0,yyy}=p. \end{gathered}$$

- Un modo compatto di scrivere queste equazioni è il seguente:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{Bmatrix}.$$

- Gli L_{ij} sono degli operatori differenziali definiti come segue

Equazioni di equilibrio di un laminato

$$L_{11} = A_{xx}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{xs}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + A_{ss}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{22} = A_{yy}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2A_{ys}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + A_{ss}\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$L_{33} = D_{xx}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{xs}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + 4D_{ys}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3} + D_{yy}\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$L_{12} = L_{21} = A_{xs}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{xy} + A_{ss})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + A_{ys}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{13} = L_{31} = -B_{xx}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3B_{xs}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} - (B_{xy} + 2B_{ss})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} - B_{ys}\frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{23} = L_{32} = -B_{xs}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - (B_{xy} + 2B_{ss})\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} - 3B_{ys}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} - B_{yy}\frac{\partial^3}{\partial y^3}.$$

Equazioni di equilibrio di un laminato

- In realtà, queste equazioni sono molto complicate, sono completamente accoppiate e non vengono quasi mai utilizzate direttamente.
- Una semplificazione notevole, e di interesse, si ha quando il laminato è disaccoppiato, **B**=**O**. In tal caso si ottiene

$$A_{xx}u_{0,xx} + 2A_{xs}u_{0,xy} + A_{ss}u_{0,yy} + A_{xs}v_{0,xx} + (A_{xy} + A_{ss})v_{0,xy} + A_{ys}v_{0,yy} = 0,$$

$$A_{xs}u_{0,xx} + (A_{xy} + A_{ss})u_{0,xy} + A_{ys}u_{0,yy} + A_{ss}v_{0,xx} + 2A_{ys}v_{0,xy} + A_{yy}v_{0,yy} = 0,$$

$$D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xxyy} + D_{yy}w_{0,yyyy} + 4D_{xs}w_{0,xxxy} + 4D_{ys}w_{0,xyyy} = p.$$

- Le due prime equazioni sono accoppiate, ma disaccoppiate dalla terza, che può essere risolta indipendentemente, riflesso del fatto che il comportamento di membrana e di flessione sono indipendenti.
- Nell'ulteriore ipotesi che il laminato sia ortotropo e che gli assi di ortotropia, sia in membrana che in flessione, corrispondano con quelli del riferimento, si ha

Equazioni di equilibrio di un laminato

$$A_{xx}u_{0,xx}+A_{ss}u_{0,yy}+(A_{xy}+A_{ss})v_{0,xy}=0,$$
$$(A_{xy}+A_{ss})u_{0,xy}+A_{ss}v_{0,xx}+A_{yy}v_{0,yy}=0,$$
$$D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}=p.$$

- Utilizzando le relazioni che legano le componenti di **A** e **D** rispettivamente ai moduli dell'ingegnere in membrana ed in flessione, pagina 330 e seguenti, si ottiene infine

$$\frac{E_x^m}{1-\nu_{xy}^m\nu_{yx}^m}u_{0,xx}+G_{xy}^m u_{0,yy}+\left(\frac{\nu_{xy}^m E_y^m}{1-\nu_{xy}^m\nu_{yx}^m}+G_{xy}^m\right)v_{0,xy}=0,$$
$$\left(\frac{\nu_{xy}^m E_y^m}{1-\nu_{xy}^m\nu_{yx}^m}+G_{xy}^m\right)u_{0,xy}+G_{xy}^m v_{0,xx}+\frac{E_y^m}{1-\nu_{xy}^m\nu_{yx}^m}v_{0,yy}=0,$$
$$\frac{E_x^f}{1-\nu_{xy}^f\nu_{yx}^f}w_{0,xxxx}+2\left(\frac{\nu_{xy}^f E_y^f}{1-\nu_{xy}^f\nu_{yx}^f}+2G_{xy}^f\right)w_{0,xxyy}+\frac{E_y^f}{1-\nu_{xy}^f\nu_{yx}^f}w_{0,yyyy}=\frac{12}{h^3}p.$$

Equazioni di equilibrio di un laminato

- Queste sono le equazioni di equilibrio delle lastre e piastre sottili ortotrope, negli assi di ortotropia, valide anche per il caso di laminati disaccoppiati.
- Per i monostrati ed i laminati quasi-omogenei, i moduli in membrana ed in flessione sono identici.
- Si verifica facilmente che in caso di comportamento isotropo le equazioni si riducono a

$$2u_{0,xx}+(1-\nu^m)u_{0,yy}+(1+\nu^m)v_{0,xy}=0,$$
$$(1+\nu^m)u_{0,xy}+(1-\nu^m)v_{0,xx}+2v_{0,yy}=0,$$
$$\nabla^4 w_0=\frac{12(1-\nu^{f^2})}{E^f h^3}p.$$

- L'ultima equazione è la classica equazione delle piastre sottili di Germain-Lagrange.

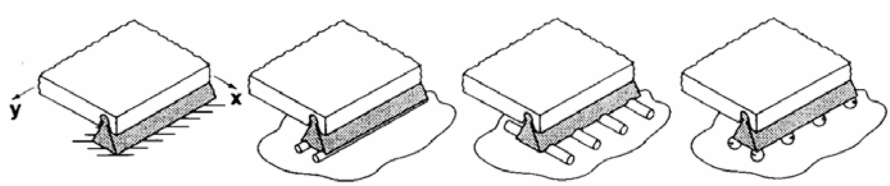
Equazioni di equilibrio di un laminato

- Nello specificare le condizioni ai bordi, si deve tener presente che nel caso dei laminati si devono considerare non soltanto gli spostamenti secondo *z*, ma anche secondo gli altri due assi; così pure per le caratteristiche meccaniche duali degli spostamenti.
- Generalmente, si considerano le due possibilità di bordo semplicemente appoggiato e di bordo incastrato.
- In realtà, per quanto appena detto, ciascuna di queste due possibilità si declina in 4 casi differenti, illustrati nelle figure seguenti (tratte dal libro di Jones), rispettivamente per il caso di appoggio (simbolo S, *supported*) e incastro (simbolo C, *clamped*).
- In caso di bordo libero, la condizione di tipo w_0=0 deve essere sostituita da quella di Kirchhoff sul taglio:

$$M_{n,t} + Q_n = K_n,$$

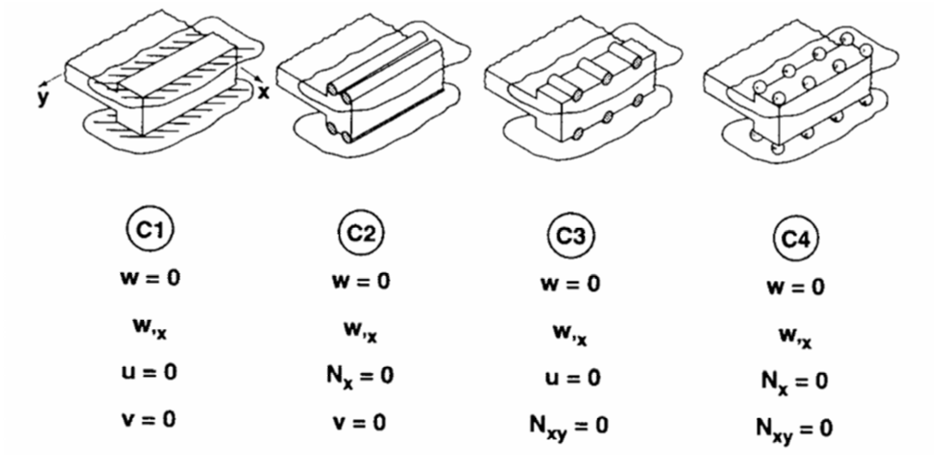
dove *n* indica la normale uscente dal bordo e *t* la tangente al bordo; K_n è la forza di Kirchhoff e costituisce il dato al bordo.

Equazioni di equilibrio di un laminato



S1	S2	S3	S4
$w = 0$	$w = 0$	$w = 0$	$w = 0$
$M_x = 0$	$M_x = 0$	$M_x = 0$	$M_x = 0$
$u = 0$	$N_x = 0$	$u = 0$	$N_x = 0$
$v = 0$	$v = 0$	$N_{xy} = 0$	$N_{xy} = 0$

Equazioni di equilibrio di un laminato



Equazioni di equilibrio di un laminato

- Diamo adesso un cenno ai metodi di soluzione delle equazioni viste e ad alcuni risultati di letteratura riguardanti il caso di laminati inflessi.
- Il metodo più utilizzato per trovare una soluzione alle equazioni di equilibrio è quello di Navier: il carico p e la freccia w_0 sono sviluppati in serie doppie di Fourier:

$$p(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$w_0(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

- Le differenti espressioni dei coefficienti p_{mn} determinano il tipo di carico; ad esempio, il caso di carico uniforme è dato da

$$p_{mn}=\frac{16p}{\pi^2 mn},\quad m \text{ e } n \text{ dispari}.$$

Equazioni di equilibrio di un laminato

- La forma data allo spostamento trasversale w_0 permette di prendere automaticamente in conto le condizioni di appoggio semplice al bordo di una piastra rettangolare di lati $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$.
- Una soluzione esatta si ottiene nel caso di laminati disaccoppiati ortotropi almeno in flessione e con assi di ortotropia paralleli ai lati. E' il caso dei cross-ply simmetrici, ad esempio, ma non solo.
- In tal caso, si verifica facilmente che la precedente espressione di w_0 in serie doppia di Fourier è la soluzione, ossia soddisfa alle equazioni al bordo e sul campo

$$D_{xx} w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss}) w_{0,xxyy} + D_{yy} w_{0,yyyy} = p,$$

se

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^4} \frac{p_{mn}}{D_{xx}\alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\alpha\beta + D_{yy}\beta^2}, \quad \alpha = \frac{m^2}{a^2}, \beta = \frac{n^2}{b^2}.$$

- Nota la funzione w_0, si possono ricavare le deformazioni e quindi le tensioni, strato per strato.

Equazioni di equilibrio di un laminato

- Consideriamo adesso il caso di un laminato ancora disaccoppiato, ma non più ortotropo in flessione, oppure con gli assi di ortotropia ruotati rispetto ai lati della piastra.
- L'equazione sul campo è adesso la seguente, dove compaiono i termini di accoppiamento flessione-torsione, D_{xs} e D_{ys}:

$$D_{xx} w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss}) w_{0,xxyy} + D_{yy} w_{0,yyyy} + 4D_{xs} w_{0,xxxy} + 4D_{ys} w_{0,xyyy} = p.$$

- Gli stessi termini di accoppiamento compaiono anche nelle condizioni naturali al contorno, vedi pagina 453:

$$\begin{aligned} M_x &= -D_{xx} w_{0,xx} - D_{xy} w_{0,yy} - 2D_{xs} w_{0,xy} = 0 \quad \text{per} \quad x = 0, a, \\ M_y &= -D_{xy} w_{0,xx} - D_{yy} w_{0,yy} - 2D_{ys} w_{0,xy} = 0, \quad \text{per} \quad y = 0, b. \end{aligned}$$

- Ora, è proprio la presenza di questi termini di accoppiamento che ha reso sin qui vana la ricerca di soluzioni esatte, ancorché sotto forma di espansioni in serie.

Equazioni di equilibrio di un laminato

- Infatti, l'espressione data dello spostamento trasversale w_0 è un tipico caso di separazione delle variabili, x e y.
- Nel caso di presenza dei termini di accoppiamento D_{xs} e D_{ys}, una tale espressione non soddisfa più le equazioni sul campo e quelle naturali ai bordi, o se si vuole, le variabili non sono più separabili.
- Questo problema si presenta non solo nel metodo di Navier, ma anche in tutti gli altri metodi di espansione in serie tentati sinora, basati anche su approcci diversi, come il metodo di Rayleigh-Ritz o quello di Galerkin, e per diversi problemi e modelli: lo si ritrova in analisi della stabilità e delle vibrazioni, nella soluzione tridimensionale esatta di Pagano e in quella per le piastre sandwich di Verchery-Pham Dang (vedi più avanti), etc.
- In tutti questi casi, il procedimento è diverso, su più punti, rispetto a quello visto qui sopra, ma l'effetto della presenza dei termini D_{xs} e D_{ys} è il medesimo.
- In definitiva, si conoscono soluzioni analitiche solo per il caso di piastre rettangolari ortotrope con gli assi di ortotropia paralleli ai lati.

Equazioni di equilibrio di un laminato

- Ashton (1967) ha utilizzato il metodo di Rayleigh-Ritz per dare una soluzione approssimata a questo problema, in cui sostanzialmente si rinuncia a soddisfare alle condizioni naturali sul bordo.
- Utilizzando l'espansione in serie di Fourier vista troncata a m=n=7, ha ottenuto, per un laminato in cui

$$D_{xx} = D_{yy}, \quad D_{xy} + 2D_{ss} = 1.5D_{xx}, \quad D_{xs} = D_{ys} = -0.5D_{xx},$$

il valore della freccia massima, in caso di carico uniforme p,

$$w_{\max} = 0.00425\frac{a^4 p}{D_{xx}}.$$

- Se invece si cerca una soluzione con il metodo di Navier, ignorando la presenza dei termini di accoppiamento D_{xs} e D_{ys}, si ottiene

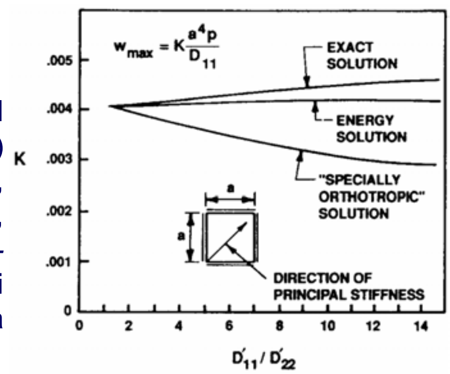
$$w_{\max} = 0.00324\frac{a^4 p}{D_{xx}}.$$

Equazioni di equilibrio di un laminato

- La soluzione esatta è invece stata ottenuta sempre da Ashton, impiegando un metodo di identificazione della rigidezza con il caso di piastre isotrope in forma di parallelogramma, per le quali si dispone di soluzioni esatte, e vale

$$w_{\max} = 0.00452\frac{a^4 p}{D_{xx}}.$$

- Quindi, la soluzione trovata con il metodo energetico (Rayleigh-Ritz) sottostima la freccia del 6%, mentre quella approssimata, considerando la piastra *specially-orthotropic*, cioè ortotropa con gli assi di ortotropia paralleli ai lati, la sottostima del 28%.



- In figura (Jones), si evidenzia come l'approssimazione diventi, in entrambi i casi, sempre peggiore con l'aumento del rapporto D_{11}/D_{22}.

Equazioni di equilibrio di un laminato

- Consideriamo adesso il caso di un laminato *cross-ply* antisimmetrico e a strati alterni, quindi ortotropo in membrana e flessione, con assi paralleli ai lati, ma accoppiato; in particolare, si verifica facilmente che in tal caso si ha $A_{xx}=A_{yy}$, $D_{xx}=D_{yy}$, $B_{yy}=-B_{xx}$, mentre sono nulle le altre componenti di **B**.
- Le equazioni sono allora

$$A_{xx}u_{0,xx} + A_{ss}u_{0,yy} + (A_{xy} + A_{ss})v_{0,xy} - B_{xx}w_{0,xxx} = 0,$$
$$(A_{xy} + A_{ss})u_{0,xy} + A_{ss}v_{0,xx} + A_{xx}v_{0,yy} + B_{xx}w_{0,yyy} = 0,$$
$$D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xxyy} + D_{xx}w_{0,yyyy} - B_{xx}(u_{0,xxx} - v_{0,yyy}) = p.$$

- Whitney (1968) ha risolto queste equazioni per il caso di appoggio semplice di tipo S2 (vedi pagina 460): nel caso in cui il carico sia dato dall'espansione in serie di Fourier di pagina 462, la soluzione è del tipo

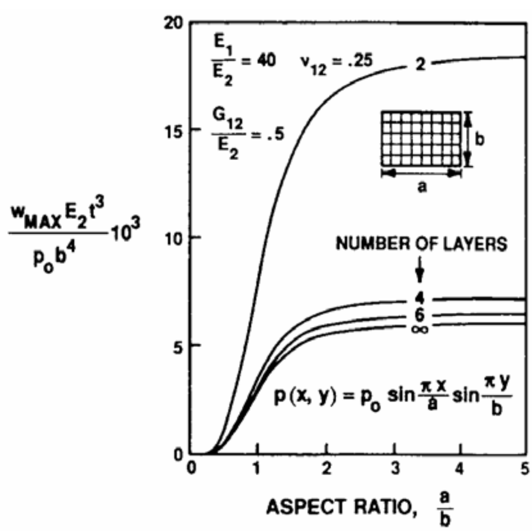
Equazioni di equilibrio di un laminato

$$u_0(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b},$$
$$v_0(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} v_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b},$$
$$w_0(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

- Se il carico è costituito da una sola armonica, allora il sistema di equazioni ammette una soluzione esatta; il caso di un carico espresso da più armoniche si può quindi risolvere con il principio di sovrapposizione degli effetti.
- Per studiare gli effetti dell'accoppiamento sul valore della soluzione, Jones ha studiato il caso in cui un laminato *cross-ply* antisimmetrico di spessore totale costante è ottenuto con un numero crescente di strati, da 2 fino ad infinito (in quest'ultimo caso, l'accoppiamento tende a zero).

Equazioni di equilibrio di un laminato

- In figura, si ha il grafico della freccia massima in funzione del rapporto a/b per i vari casi, quando il carico sia una semplice sinusoide (m=n=1).
- Tra il caso di un laminato disaccoppiato (infiniti strati) e quello di un laminato con il massimo dell'accoppiamento, 2 strati, la freccia aumenta di circa un fattore 3.
- L'accoppiamento ha quindi l'effetto di una diminuzione della rigidezza flessionale apparente del laminato.



Equazioni di equilibrio di un laminato

- Infine, consideriamo il caso di un laminato *angle-ply* antisimmetrico, a strati alternati, quindi ortotropo in membrana e flessione, con assi paralleli ai lati, ma accoppiato; in particolare, si verifica facilmente che in tal caso si ha B_{xs} e B_{ys} diversi da zero, mentre sono nulle le altre componenti di **B**. L'accoppiamento è quindi diverso da quello del caso precedente.
- In tal caso, le equazioni sono

$$\begin{gathered}
A_{xx}u_{0,xx}A_{ss}u_{0,yy}+(A_{xy}+A_{ss})v_{0,xy}-3B_{xs}w_{0,xxy}-B_{ys}w_{0,yyy}=0,\\
(A_{xy}+A_{ss})u_{0,xy}+A_{ss}v_{0,xx}+A_{yy}v_{0,yy}-B_{xs}w_{0,xxx}-3B_{ys}w_{0,xyy}=0,\\
D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}-\\
-B_{xs}(3u_{0,xxy}+v_{0,xxx})-B_{ys}(u_{0,yyy}3v_{0,xyy})=p.
\end{gathered}$$

- Withney (1968) ha risolto questo caso per le condizioni di appoggio semplice di tipo S3 (vedi pagina 460); se ancora il carico è espresso in serie di Fourier, la soluzione è del tipo

Equazioni di equilibrio di un laminato

$$\begin{aligned}
u_0(x,y)&=\sum_{m,n=1}^{\infty}u_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},\\
v_0(x,y)&=\sum_{m,n=1}^{\infty}v_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\\
w_0(x,y)&=\sum_{m,n=1}^{\infty}w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned}$$

- Come nel caso precedente, la soluzione analitica esiste se il carico è rappresentato da una sola armonica; si procede dunque, nel caso generale, con il principio di sovrapposizione degli effetti.
- Lo stesso tipo di studio visto in precedenza, condotto su un laminato con numero di strati che aumenta per uno spessore totale costante, è stato realizzato anche in questo caso da Jones.
- Il grafico seguente mostra il risultato per una piastra quadrata, in funzione dell'angolo di orientazione degli strati, θ.
- Lo stesso tipo di considerazioni possono essere fatte.

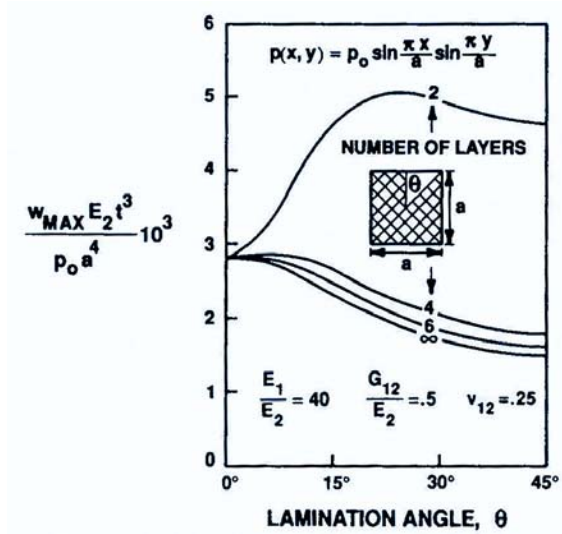
Equazioni di equilibrio di un laminato

- In particolare, si verifica facilmente che in un caso come questo si ha

$$B_{xs} = \frac{h^2}{2n} Q_{xs},$$

$$B_{ys} = \frac{h^2}{2n} Q_{ys}.$$

- Dunque, se il numero n degli strati aumenta, i coefficienti di accoppiamento diminuiscono e con essi il loro effetto sul valore dello spostamento.



Stabilità elastica di un laminato

- Diamo ora un cenno alla teoria classica della stabilità dei laminati, quella cioè che si basa sul modello di Kirchhoff e su un'analisi linearizzata, capace di cogliere il valore del carico critico (se esiste) e la deformata modale.
- Vi sono diversi modi per giungere alla scrittura delle equazioni di stabilità di un laminato.
- Una via classica (cfr. ad esempio l'articolo di Leissa nel libro di Turvey e Marshall in bibliografia), è quella di riscrivere le equazioni di equilibrio della piastra, come fatto nel paragrafo precedente, ma in corrispondenza di una configurazione inflessa della piastra, vicina alla configurazione di partenza e sotto l'azione di forze distribuite non solo ortogonali al piano medio ma anche parallele, q_x e q_y.
- Trascurando i termini infinitesimi di ordine superiore, si giunge con alcuni passaggi alle seguenti equazioni di equilibrio:

Stabilità elastica di un laminato

$$
\begin{aligned}
&N_{x,x} + N_{s,y} + q_x = Q_x w_{0,x},\\
&N_{s,x} + N_{y,y} + q_y = Q_y w_{0,y},\\
&Q_{x,x} + Q_{y,y} + N_x w_{0,xx} + 2N_s w_{0,xy} + N_y w_{0,yy} + p = 0,\\
&M_{x,x} + M_{s,y} = Q_x,\\
&M_{s,x} + M_{y,y} = Q_y.
\end{aligned}
$$

- Nelle equazioni sopra, si ammette che le forze di taglio Q_x e Q_y, come pure le inclinazioni del piano medio $w_{0,x}$ e $w_{0,y}$ siano piccole; trascurando allora i termini relativi e sostituendo le ultime due equazioni nelle prime tre, si giunge a

$$
\begin{aligned}
N_{x,x} + N_{s,y} + q_x &= 0,\\
N_{s,x} + N_{y,y} + q_y &= 0,\\
M_{x,xx} + 2M_{s,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{0,xx} + 2N_s w_{0,xy} + N_y w_{0,yy} + p &= 0.
\end{aligned}
$$

Stabilità elastica di un laminato

- A questo punto, si considera che ciascuna delle grandezze che appaiono nelle precedenti equazioni possa essere scritta come la somma di due parti, una parte iniziale (indice *i*), che esiste prima dell'instabilità, ed una parte dovuta all'instabilità (indice *b*, *buckling*); ad esempio

$$N_x = N_x^i + N_x^b.$$

- Inoltre, si assume che la piastra sia piana fino all'instabilità e che nessuna forza si aggiunga in fase instabile, ossia

$$w_0 = w_0^b, \quad q_x = q_x^i, \quad q_y = q_y^i, \quad p = p^i.$$

- Prima dell'instabilità, le equazioni precedenti si riducono a quelle classiche di equilibrio,

$$
\begin{aligned}
N^i_{x,x} + N^i_{s,y} + q^i_x &= 0,\\
N^i_{s,x} + N^i_{y,y} + q^i_y &= 0,\\
M^i_{x,xx} + 2M^i_{s,xy} + M^i_{y,yy} + p^i &= 0.
\end{aligned}
$$

Stabilità elastica di un laminato

- Le equazioni di equilibrio di pagina 475 si riducono allora a

$$N^b_{x,x} + N^b_{s,y} = 0,$$
$$N^b_{s,x} + N^b_{y,y} = 0,$$
$$M^b_{x,xx} + 2M^b_{s,xy} + M^b_{y,yy} + N^i_x w_{0,xx} + 2N^i_s w_{0,xy} + N^i_y w_{0,yy} = 0.$$

- Nello scrivere queste equazioni, si sono trascurati i termini

$$N^b_x w_{0,xx} + 2N^b_s w_{0,xy} + N^b_y w_{0,yy}$$

considerati piccoli rispetto agli ultimi tre della terza equazione. Inoltre, se non si trascurassero non si giungerebbe a delle equazioni lineari, dato che i termini del tipo N_x^b etc. dipendono da w_0.

- Le equazioni precedenti sono le equazioni di stabilità delle piastre nella loro forma fondamentale.

Stabilità elastica di un laminato

- Se adesso si fa riferimento alla teoria classica dei laminati, si possono, come già fatto nel caso delle equazioni di equilibrio, esprimere le risultanti in termini delle componenti di spostamento del piano medio, pagina 453, e si ottengono allora, con alcuni passaggi, le equazioni della stabilità delle piastre nella forma seguente

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} - F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

- L'equazione sopra definisce un problema omogeneo, ed i termini L_{ij} sono gli stessi operatori differenziali definiti a pagina 455 (per semplicità, si omettono gli indici *i* e *b*), mentre *F*, che rappresenta il carico nel piano medio, è

$$F = N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2N_s \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

Stabilità elastica di un laminato

- Le equazioni precedenti, a causa dell'accoppiamento membrana-flessione, sono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali dell'8° ordine, come accade nel caso della teoria classica dei gusci sottili.
- Le equazioni si semplificano nel caso di laminato disaccoppiato, **B**=**O**: le due prime equazioni si riducono alle classiche equazioni di equilibrio di lastra, prime due equazioni di pagina 456, e si disaccoppiano dalla terza, che diviene

$$D_{xx}w_{0,xxxx}+4D_{xs}w_{0,xxxy}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+4D_{ys}w_{0,xyyy}+$$
$$+D_{yy}w_{0,yyyy}=N_xw_{0,xx}+2N_sw_{0,xy}+N_yw_{0,yy}$$

- Questa è l'equazione dell'instabilità di una piastra monostrato anisotropa, del 4° ordine, oppure, come visto, di un laminato disaccoppiato.
- Nel caso particolare in cui il comportamento di flessione sia

Stabilità elastica di un laminato

ortotropo (quello di membrana non entra in gioco nella teoria liearizzata), l'equazione sopra si semplifica in

$$D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}=$$
$$=N_xw_{0,xx}+2N_sw_{0,xy}+N_yw_{0,yy}$$

- Le equazioni precedenti permettono di ricavare il carico critico e la forma modale. I metodi normalmente utilizzati, sono gli stessi visti per la soluzione delle equazioni di equilibrio.
- In particolare, si conosce la soluzione esatta del carico critico per un laminato rettangolare, appoggiato sui bordi, ortotropo in flessione con gli assi di ortotropia paralleli ai lati, disaccoppiato e soggetto a solo carico biassiale, **N**=(N_x, N_y, 0).
- In tal caso, l'equazione sul campo è

$$D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}=N_xw_{0,xx}+N_yw_{0,yy},$$

Stabilità elastica di un laminato

e se si utilizza ancora l'espressione di pagina 462 per esprimere lo spostamento w_0, si ha che le equazioni sul campo e al bordo sono soddisfatte se il moltiplicatore del carico λ è

$$\lambda = \pi^2 \frac{D_{xx}\alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\alpha\beta + D_{yy}\beta^2}{N_x\alpha + N_y\beta}, \quad \alpha = \frac{m^2}{a^2}, \beta = \frac{n^2}{b^2}.$$

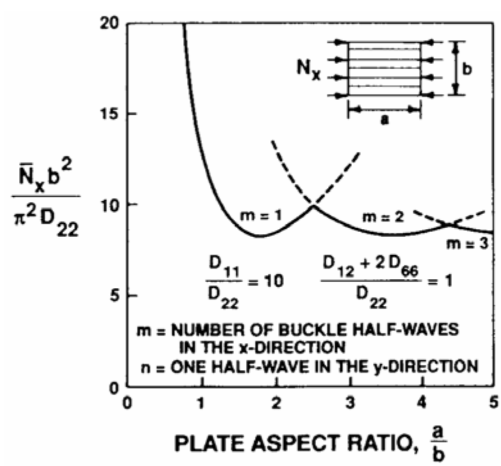
- Ovviamente, il moltiplicatore critico di stabilità è il più piccolo valore di λ; è difficile dire *a priori* quale questo sia, perché dipende da m, n e dai coefficienti elastici D_{ij}, oltre che dal rapporto tra N_x e N_y e tra a e b.
- Ad esempio, se N_y=0, cioè se si ha compressione solo lungo l'asse x, allora il valore critico si ha per n=1, ma per quanto riguarda m niente si può dire in generale.
- Si consideri (Jones) il caso di un laminato per il quale

$$D_{xx} = 10D_{yy}, \quad D_{xy} + 2D_{ss} = D_{yy}.$$

Stabilità elastica di un laminato

- I valore di N_x critico in funzione di m e del rapporto a/b è in figura.
- Si osserva che per a/b<~2.5, m=1, cioè il modo ha una sola semionda; per a=b si ha

$$N_x^{crit} = 13\frac{\pi^2 D_{yy}}{b^2}.$$



- Per a/b che tende verso infinito, il numero delle semionde aumenta ed il carico critico tende verso

$$N_x^{crit} = 8.32456\frac{\pi^2 D_{yy}}{b^2}.$$

- Per altri materiali, si ottengono comportamenti analoghi.

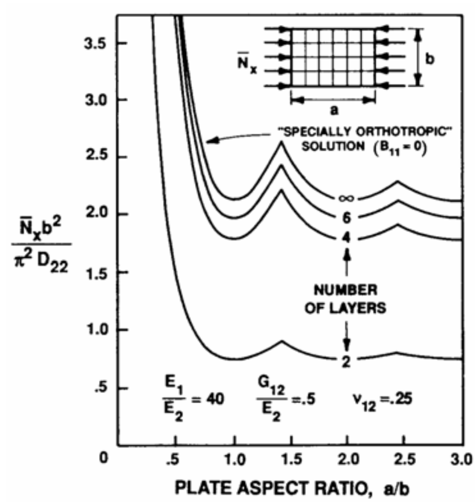
Stabilità elastica di un laminato

- Il caso di laminati disaccoppiati ma non ortotropi, oppure ortotropi ma ruotati rispetto ai lati della piastra, è stato ancora trattato da Ashton e Waddoups (1969) con lo stesso metodo visto per la flessione, o ancora da Chamis (1968), con il metodo di Galerkin.
- L'effetto dei termini di accoppiamento flessione-torsione D_{xs} e D_{ys} è quello di diminuire il carico critico; in definitiva, assumere che un laminato si comporti come ortotropo in flessione quando non lo è, come si fa spesso in progettazione, non è un procedimento conservativo.

- Il caso di un laminato *cross-ply* antisimmetrico e a strati alterni, già trattato per la flessione, è stato considerato e risolto da Jones nello stesso caso della flessione e per un carico monoassiale N_x.
- Senza entrare nei dettagli della soluzione, piuttosto complicata, si riporta di seguito una figura analoga, per quanto riguarda il valore del carico critico, a quella riportata a pagina 470 per la freccia.

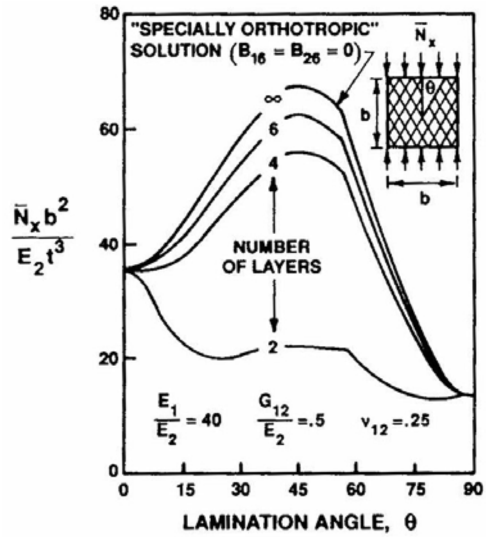
Stabilità elastica di un laminato

- Essa riporta la variazione del valore critico di stabilità di N_x, quando si lasci invariato lo spessore totale e si aumenti il numero degli strati.
- Anche in questo caso, l'effetto dell'accoppiamento membrana-flessione è quello di diminuire il carico critico.
- Withney (1968) ha risolto il caso, analogo a quello in flessione di pagina 471, di un laminato *angle-ply* antisimmetrico, a strati alternati, ancora soggetto a carico uniassiale N_x, e per le stesse condizioni viste in flessione.



Stabilità elastica di un laminato

- Ancora una volta si tralascia la soluzione (vedere Jones per maggiori dettagli) ma si riporta una figura analoga alla precedente, che mostra la variazione del carico critico con l'angolo di orientazione e il numero degli strati, quando lo spessore totale sia conservato costante.
- Si conferma ancora che la presenza dell'accoppiamento membrana-flessione ha come effetto la diminuzione del carico critico.
- Si deve però fare una precisazione.



Stabilità elastica di un laminato

- In effetti, la presenza di un accoppiamento membrana-flessione ha, il più delle volte, un effetto perturbativo sul comportamento della piastra.
- Infatti, sappiamo che tale accoppiamento ha come effetto l'insorgere di curvature, e quindi di spostamenti trasversali, a seguito dell'applicazione di carichi membranali.
- In altre parole, l'accoppiamento produce un effetto di *imperfezione automatica*, insita nel laminato all'insorgere del carico, che normalmente cancella il fenomeno propriamente detto della perdita di stabilità di una configurazione fondamentale di equilibrio in corrispondenza di una biforcazione di quest'ultimo.
- Insomma, la presenza dell'accoppiamento produce spostamenti trasversali non appena si applica il carico membranale, ben prima dell'insorgere dell'instabilità.
- Gli spostamenti trasversali si accrescono quindi progressivamente, e non esiste una configurazione banale di equilibrio.

Stabilità elastica di un laminato

- L'effetto dell'accoppiamento sulla biforcazione e stabilità è in definitiva simile a quello di una imperfezione geometrica.
- Tuttavia, in alcuni casi si ha ancora l'apparizione di una biforcazione dell'equilibrio anche in presenza di accoppiamento membrana-flessione.
- Per maggiori dettagli, si rinvia al libro di Jones o al citato articolo di Leissa, dove si analizza anche quali debbano essere le forze trasversali o le coppie al bordo da applicare alla piastra accoppiata per mantenerne la configurazione piana e quindi permettere il prodursi della biforcazione.

Vibrazioni trasversali di un laminato

- Consideriamo adesso il caso delle vibrazioni trasversali libere di piccola ampiezza di un laminato attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.
- Le equazioni del moto per un tale problema si ricavano semplicemente da quelle viste per la stabilità, aggiungendo però al carico trasversale le forze di inerzia, $-\mu w_{0,tt}$, dove μ è la massa del laminato per unità di superficie e $w_{0,tt}$ è la derivata seconda dello spostamento w_0 rispetto al tempo.
- Sviluppando ancora i calcoli come visto, le equazioni di pagina 477 diventano

$$N_{x,x} + N_{s,y} = 0,$$

$$N_{s,x} + N_{y,y} = 0,$$

$$M_{x,xx} + 2M_{s,xy} + M_{y,yy} + N_x^i w_{0,xx} + 2N_s^i w_{0,xy} + N_y^i w_{0,yy} = \mu w_{0,tt}.$$

- L'indice i resta a identificare la parte di carico assiale applicata al laminato in corrispondenza dell'equilibrio.

Vibrazioni trasversali di un laminato

- Procedendo poi come già visto per la stabilità, ossia inserendo nelle equazioni sopra il legame tra azioni e spostamenti della teoria classica, si ottengono finalmente la equazioni cercate:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33}-F \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

- L'equazione sopra definisce un problema omogeneo, ed i termini L_{ij} sono gli stessi operatori differenziali definiti a pagina 455 (per semplicità, si omettono gli indici *i* e *b*), mentre *F* rappresenta il carico, nel piano medio e dovuto alle forze di inerzia:

$$F=N_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2N_s\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

- L'equazione sopra è utilizzata per la ricerca delle frequenze proprie e dei modi propri di vibrare.

Vibrazioni trasversali di un laminato

- Se **N**^{i}=**O**, cioè se la piastra non è soggetta ad uno stato di forze membranali impresse, si parla di frequenze naturali ed in tal caso

$$F=-\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

- Nel seguito, si dànno dei cenni di soluzioni per la ricerca delle frequenze naturali, cioè considereremo sempre **N**^{i}=**O**, ancora per i 4 casi visti in precedenza per la flessione e la stabilità.

- Iniziamo dunque con il caso di una piastra rettangolare semplicemente appoggiata, costitutita da un laminato disaccoppiato ortotropo almeno in flessione e con assi di ortotropia paralleli ai lati.
- In tale situazione, si ottiene ancora una soluzione esatta, prendendo come espressione dello spostamento trasversale

$$w_0(x,y,t)=a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\omega_{mn}t.$$

Vibrazioni trasversali di un laminato

- Si è dunque, classicamente, separata la parte dipendente dal tempo da quella dipendente dalla posizione, o se si vuole, il modo, determinato dalla scelta di *m* e *n*, dalla frequenza, ω_{mn}.
- L'equazione sul campo in questo caso è

$$D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}=-\mu w_{0,tt}.$$

- La scelta fatta per w_0 soddisfa l'equazione sul campo e quella ai bordi se la frequenza è

$$\omega_{mn}^2=\frac{\pi^4}{\mu}\left[D_{xx}\alpha^2+2(D_{xy}+2D_{ss})\alpha\beta+D_{yy}\beta^2\right]\quad \alpha=\frac{m^2}{a^2},\ \beta=\frac{n^2}{b^2}.$$

- La frequenza naturale fondamentale si ha per m=n=1, come per una piastra isotropa. Questa corrispondenza di modi non si verifica però, in generale, per le frequenze superiori.

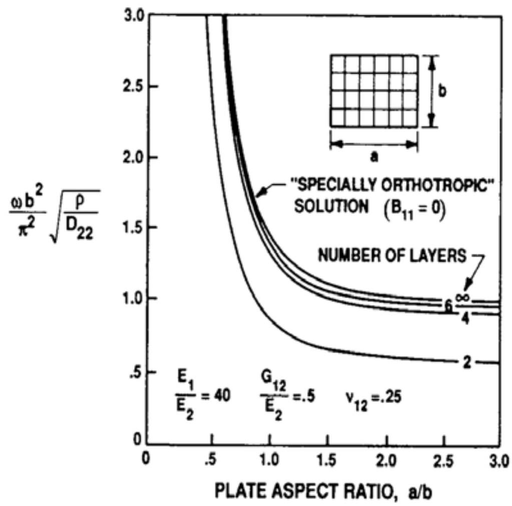
Vibrazioni trasversali di un laminato

- Il caso di laminati disaccoppiati ma non ortotropi, oppure ortotropi ma ruotati rispetto ai lati della piastra, presenta gli stessi problemi visti per la flessione e la stabilità, dovuti ai termini di accoppiamento flessione-torsione D_{xs} e D_{ys}; tuttavia, nessun risultato numerico approssimato per questo caso sembra essere disponibile in letteratura.

- Il caso di un laminato *cross-ply* antisimmetrico e a strati alterni è stato trattato da Withney (1968); la soluzione è complicata e si rimanda al libro di Jones per ulteriori dettagli.
- Tuttavia, in questo caso non si può affermare, come nel precedente, che la frequenza fondamentale corrisponda sempre al caso m=n=1.
- Si riporta di seguito una figura che, come già fatto per la flessione e la stabilità, mostra la variazione della frequenza fondamentale in funzione del rapporto *a/b* per un laminato avente uno spessore totale costante ma diversi numeri di strati.

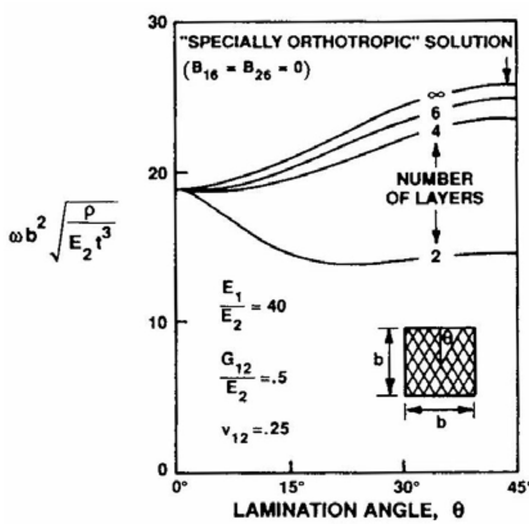
Vibrazioni trasversali di un laminato

- Si osserva che l'effetto dell'accoppiamento è quello di ridurre la frequenza fondamentale, e questo conferma quanto già visto in precedenza per flessione e stabilità: in entrambi i casi l'accoppiamento aveva un effetto di diminuzione della rigidezza apparente a flessione.
- Per terminare, il caso di un laminato *angle-ply* antisimmetrico, a strati alternati, è stato ancora risolto da Withney (1968).



Vibrazioni trasversali di un laminato

- Tralasciando la soluzione, per la quale si rimanda al testo di Jones, e per la quale valgono le stesse osservazioni fatte al caso precedente, si riporta una figura corrispondente alla precedente, per lo stesso tipo di analisi, ma in funzione dell'orientazione θ degli strati di una piastra quadrata.
- Si osserva l'effetto dell'accoppiamento, che provoca ancora una diminuzione della frequenza fondamentale.



Il calcolo delle tensioni di taglio

- Consideriamo adesso il calcolo delle tensioni di taglio attraverso lo spessore del laminato, ossia le tensioni σ_{zx} e σ_{zy}.
- Si è visto che queste non si possono ricavare dalla teoria classica attraverso le equazioni costitutive, in quanto nel modello le deformazioni corrispondenti ε_{zx} e ε_{zy} sono nulle, per la cinematica adottata (conservazione della normale alla superficie media).

- Si apre qui una parentesi per aggiungere una precisazione, forse non fondamentale ma chiarificativa: quanto appena detto è una giustificazione classica ma solo parziale della necessità di "regolare la questione delle tensioni di taglio".
- Infatti, anche nel caso in cui lo stato di deformazione sia piano, ciò che accade nella teoria classica come conseguenza dell'ipotesi cinematica di Kirchhoff, le tensioni trasversali calcolate tramite la legge costitutiva non sono necessariamente nulle; in particolare, non lo sono per un materiale anisotropo qualsiasi, vedi pagina 299.

Il calcolo delle tensioni di taglio

- Lo sono invece per un materiale ortotropo in cui l'asse z è di ortotropia, e *a fortiori* per un materiale trasversalmente isotropo, con z tra gli assi di isotropia trasversa, e per un materiale isotropo.
- Sono proprio questi ultimi due i casi che ci interessano, il primo per i materiali compositi e l'altro per quelli classici.
- Questo indica che il modello cinematico da solo non giustifica la necessità di indagare a fondo le tensioni da taglio, perché questa necessità è più profonda e attiene a problemi di consistenza meccanica di una teoria delle piastre.
- In altre parole, e per terminare con questa parentesi, se si applicasse il modello di Kirchhoff ad un materiale anisotropo qualsiasi, si potrebbero calcolare delle tensioni di taglio, ma non sarebbero quelle corrette.

- Si é poi visto come ricavare, tramite le equazioni di equilibrio, le risultanti Q_x e Q_y delle tensioni di taglio, necessarie all'equilibrio ogni volta che si ha un carico trasversale al piano medio.

Il calcolo delle tensioni di taglio

- Tramite le equazioni indefinite di equilibrio è anche possibile ricavare le tensioni σ_{zx} e σ_{zy}, con un procedimento analogo, ma più elaborato e complesso, di quello utilizzato per le piastre isotrope monostrato.
- Infatti, le prime due componenti dell'equazione indefinita di equilibrio

$$div\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

scritte in ipotesi di forze di massa **b** nulle, sono

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} = 0,$$
$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} = 0.$$

- Allora, per ciascuno strato *k* si possono ricavare le tensioni nel piano in funzione delle componenti di spostamento, utilizzando il legame costitutivo.
- Per semplificare, conviene fare questa operazione nel riferimento materiale di ogni strato (il riferimento può quindi cambiare al cambiare dello strato)

Il calcolo delle tensioni di taglio

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

- Allora, con alcuni passaggi si ottiene

$$\sigma_{13} = -\left[Q_{11}u_{0,11} + Q_{66}u_{0,22} + (Q_{12} + Q_{66})v_{0,12}\right]x_3 + \\ + \left[Q_{11}w_{0,111} + (Q_{12} + 2Q_{66})w_{0,122}\right]\frac{x_3^2}{2} + c_1,$$
$$\sigma_{23} = -\left[Q_{66}v_{0,11} + Q_{22}v_{0,22} + (Q_{12} + Q_{66})u_{0,12}\right]x_3 + \\ + \left[Q_{22}w_{0,222} + (Q_{12} + 2Q_{66})w_{0,112}\right]\frac{x_3^2}{2} + c_2.$$

- Le costanti di integrazione si possono determinare solo se la sequenza è simmetrica e se non vi sono deformazioni membranali, imponendo la continuità delle tensioni all'interfaccia degli strati e che la tensione si annulli sulle facce esterne (assenza di carico radente).
- Una soluzione in un caso particolare (*cross-ply* o comunque strati tutti con gli assi di ortotropia paralleli) è data da Lekhnitskii.

Il calcolo delle tensioni di taglio

- In tutti gli altri casi, il sistema lineare che si ottiene per il calcolo delle costanti di integrazione è sovradeterminato, e quindi in generale non si può risolvere.
- Quindi, non è in generale possibile per i laminati il calcolo delle tensioni da taglio partendo dalla teoria classica.

- Un'altra osservazione: le equazioni indefinite di equilibrio che abbiamo appena usato per le tensioni da taglio portano ad un paradosso, anche per un monostrato isotropo.
- Infatti, esse mostrano che le tensioni da taglio non sono nulle, e che quindi lo stato di tensione è ben lungi dall'essere piano, anche nel caso di una deformazione puramente membranale.
- Tuttavia tale stato di tensione, a risultante nulla sullo spessore, è compatibile solo con delle tensioni tangenziali opposte applicate sulle facce, tensioni che hanno una risultante flettente!

Il calcolo delle tensioni di taglio

- In un certo senso, i paradossi del modello classico non finiscono mai...
- In definitiva: se, accettato il modello di Kirchhoff, e quindi il fatto che le deformazioni da taglio sono nulle, si calcolano le tensioni da taglio con il legame costitutivo di un materiale almeno ortotropo, con *z* asse di ortotropia, si trovano tensioni da taglio nulle, ma se, con lo stesso modello, si utilizzano le equazioni indefinite di equilibrio e il legame costitutivo ortotropo per calcolare le tensioni di taglio, queste non sono nulle nemmeno per uno stato di deformazione membranale, cioè costante sullo spessore.

- Queste circostanze ci fanno comprendere la necessità di una teoria più fine, che prenda in conto sin dal modello cinematico l'esistenza di deformazioni da taglio e quindi delle tensioni da taglio ad esse collegate.

Il calcolo delle tensioni di taglio

- Resta tuttavia da stabilire quale modello cinematico scegliere, perché questo influenza poi il calcolo delle tensioni da taglio.
- Prima di esaminare brevemente questo aspetto, si analizza per sommi capi nel paragrafo seguente un problema che mostra l'importanza di disporre di un metodo di calcolo affidabile per le tensioni trasversali: si tratta di un modello semplice, che mette in evidenza l'esistenza delle cosiddette *tensioni al bordo libero*.

- Per terminare, si fa cenno ad un metodo approssimato riportato da Jones, invero assai complicato, valido solo per piastre rettangolari appoggiate costituite da laminati simmetrici con ogni strato ortotropo e con assi di ortotropia paralleli ai lati della piastra.
- Si riporta solo il grafico seguente, in cui l'analisi della variazione della freccia massima in funzione del rapporto lato/spessore mostra la necessità, per le piastre non sottili, di ricorrere a modelli cinematici diversi da quello classico, e non solo per il calcolo delle tensioni di taglio.

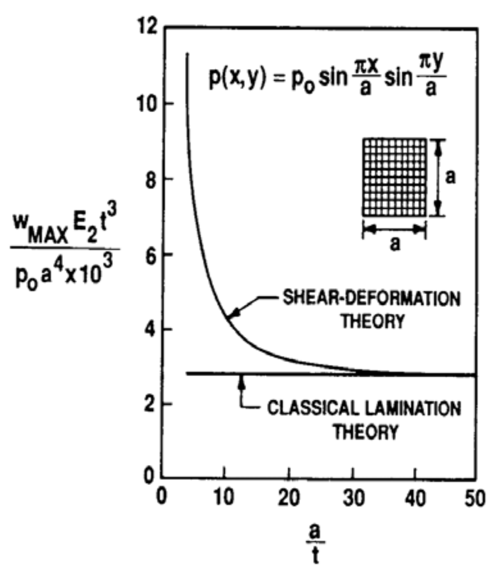
Il calcolo delle tensioni di taglio

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

- Il grafico si riferisce ad una piastra quadrata, a sequenza [0°/90°/90°/0°], sottoposta ad un carico sinusoidale, il cui materiale costituente gli strati è un carbonio-epoxy le cui caratteristiche sono

$$E_1/E_2 = 40, \quad G_{12}/E_2 = 0.6,$$
$$G_{13}/E_2 = 0.5, \quad \nu_{13} = 0.25.$$

- Si osserva che solo per valori molto elevati (>~30) del rapporto lato/spessore la teoria classica dà risultati corretti per la freccia massima.

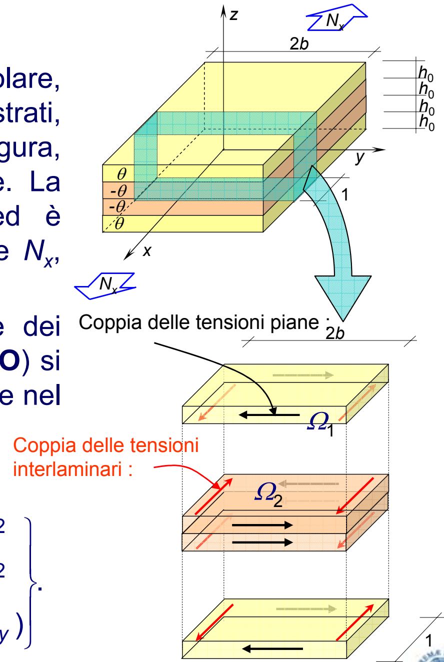


Le tensioni ai bordi liberi

- Consideriamo una piastra rettangolare, formata da un laminato a 4 strati, simmetrico, angle-ply come in figura, essendo θ l'angolo di laminazione. La larghezza della piastra è $2b$, ed è sottoposta soltanto ad una trazione N_x, come in figura.
- Applicando la legge fondamentale dei laminati a questo caso (**M**=**O** e **B**=**O**) si ottiene, per le deformazioni espresse nel riferimento di ortotropia dello strato:

$$\{\varepsilon\} = [T]^{-T}[A]^{-1}\{N\} =$$

$$= \frac{1}{4h_0}\frac{N_x}{Q_{xx}Q_{yy}-Q_{xy}^2}\left\{\begin{array}{c} Q_{yy}c^2 - Q_{xy}s^2 \\ Q_{yy}s^2 - Q_{xy}c^2 \\ -2cs(Q_{xy}+Q_{yy}) \end{array}\right\}.$$



Le tensioni ai bordi liberi

- Mentre ε_1 e ε_2 sono le stesse per tutti gli strati, ε_6 cambia di segno con l'orientazione, $\pm\theta$.
- Se si calcolano poi le tensioni, nel riferimento della piastra, si ottiene

$$\{\sigma\}'_k = [Q]'_k\{\varepsilon\}' = [Q]'_k[A]^{-1}\{N\} = \frac{N_x}{4h_0}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \dfrac{Q_{xs}Q_{yy}-Q_{ys}Q_{xy}}{Q_{xx}Q_{yy}-Q_{xy}^2} \end{array}\right\}_k.$$

- Dunque, σ_s=σ_{xy} non è nulla. Tuttavia, la condizione ai bordi liberi laterali, y=±b, impone che sia

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0.$$

- Si ha quindi una contraddizione con quanto trovato sopra tramite la legge costitutiva, in quanto in generale

Le tensioni ai bordi liberi

$$\sigma_{xy} = \frac{N_x}{4h_0}\frac{Q_{xs}Q_{yy}-Q_{ys}Q_{xy}}{Q_{xx}Q_{yy}-Q_{xy}^2} \neq 0.$$

- Naturalmente, può accadere che per alcuni valori dell'orientazione θ il numeratore si annulli, ma in generale sarà diverso da 0.
- Il risultato trovato è meccanicamente impossibile. Inoltre, se si considerano stavolta i lati della piastra ortogonali all'asse x, si ottiene ancora la stessa incongruenza per le tensioni σ_{yx}.
- Si ha dunque un paradosso meccanico, che si può spiegare con il modello della figura di pagina 503: isolando una striscia di laminato di lunghezza unitaria e separando i vari strati, si vede che ciascuno strato è sottoposto ad una coppia dovuta alla presenza, nello spessore dello strato, delle tensioni σ_{xy}.
- Dal momento che σ_{yy}=0 e che σ_{xx} ha una distribuzione costante lungo y, tale coppia può essere equilibrata solo da altre tensioni, quelle che le lamine si scambiano tra loro.

Le tensioni ai bordi liberi

- Tali tensioni, dette tensioni di taglio interlaminari (*shear interlaminar stresses*) saranno del tipo σ_{xz} e tali da equilibrare la coppia dovuta alle tensioni σ_{xy}:

$$\int_{\Omega_1} \sigma_{xy} dy\, dz + \int_{\Omega_2} 2y\sigma_{xz} dx\, dy = 0.$$

- Dunque, per reciprocità, anche le tensioni σ_{zx} saranno non nulle.
- Questo modello, assai elementare, spiega la necessità dell'esistenza di tensioni da taglio anche nel caso estrememamente semplice esaminato, in cui non è *a priori* prevedibile, apparentemente, l'esistenza di tali tensioni.
- Il problema viene dall'aver considerato uno stato di tensione piano, come conseguenza dell'applicazione diretta della legge costitutiva al tensore delle deformazioni derivante dall'ipotesi di Kirchhoff, e dall'aver trascurato le tensioni σ_{zz}.
- In definitiva, anche se lo stato di sollecitazione è piano, quello di tensione non lo è necessariamente.

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

Le tensioni ai bordi liberi

- La valutazione delle tensioni di taglio appare quindi in tutta la sua importanza: se da un lato, come visto nell'esempio conclusivo del paragrafo precedente, una cinematica corretta, che prenda in conto gli effetti di taglio, è importante per ben definire l'effettiva rigidezza di un laminato, globalmente molto più sensibile di piastre monostrato al fenomeno della deformazione da taglio, dall'altro è importante poter ben valutare, localmente, le tensioni da taglio.
- Queste infatti devono essere prese in conto, a rigore, in una verifica di resistenza del materiale e inoltre possono dar luogo, soprattutto presso i bordi liberi, all'insorgere di fenomeni di delaminazione, di distacco cioè delle lamine, provocati proprio dalle tensioni interlaminari e da quelle, non messe in evidenza dal modello presentato, di tipo σ_{zz}, agenti in una direzione in cui, in generale, la resistenza dello strato di base è più debole.
- Si deve dunque analizzare il problema con un approccio tridimensionale.

Le tensioni ai bordi liberi

- La legge costitutiva di uno strato nel suo riferimento materiale è allora, pagina 103,

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}.$$

- Ruotando questa relazione per scriverla nel riferimento del laminato si ottiene (si indicano con un apice le componenti scritte in questo riferimento):

Le tensioni ai bordi liberi

$$\begin{Bmatrix}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ \sigma'_3\\ \sigma'_4\\ \sigma'_5\\ \sigma'_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16}\\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26}\\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36}\\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0\\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon'_1\\ \varepsilon'_2\\ \varepsilon'_3\\ \varepsilon'_4\\ \varepsilon'_5\\ \varepsilon'_6\end{Bmatrix}.$$

- Se le forze di volume sono nulle e considerando lo stato di sollecitazione **N**=(N_x, 0, 0), per il quale le componenti di tensione non dipendono da *x*, le equazioni indefinite di equilibrio si riducono a

$$\begin{aligned}\sigma'_{6,2}+\sigma'_{5,3}&=0,\\ \sigma'_{2,2}+\sigma'_{4,3}&=0,\\ \sigma'_{4,2}+\sigma'_{3,3}&=0.\end{aligned}$$

Le tensioni ai bordi liberi

- Inoltre, per le simmetrie del problema e per il fatto che le componenti di tensione non sono funzione di *x*, le componenti di spostamento devono avere la forma

$$\begin{aligned}&u=\lambda x+U(y,z),\quad \lambda>0, &&\text{con}\quad U(y,z)=-U(-y,z)=U(y,-z),\\ &v=V(y,z), &&\text{con}\quad V(y,z)=-V(-y,z)=V(y,-z),\\ &w=W(y,z), &&\text{con}\quad W(y,z)=W(-y,z)=-W(y,-z).\end{aligned}$$

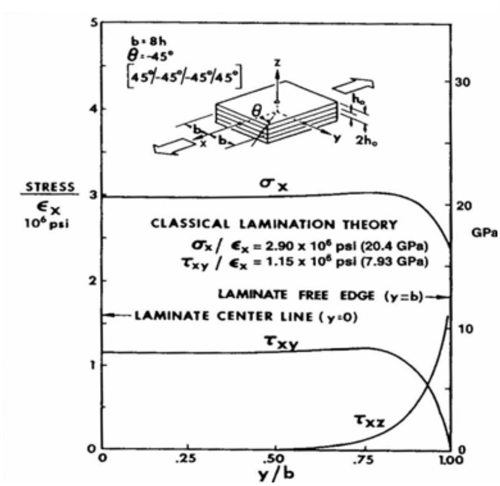
- Infatti, si verifica facilmente, utilizzando il legame costitutivo, che solo in tal modo le componenti di tensione non dipendono da *x* e rispettano le simmetrie del problema.
- Se si introduce nelle equazioni di equilibrio il legame costitutivo visto e si esprimono le componenti di deformazione in funzione delle componenti di spostamento espresse come sopra, si ottengono le equazioni di equilibrio in funzione di *U*, *V* e *W*, che descrivono gli spostamenti:

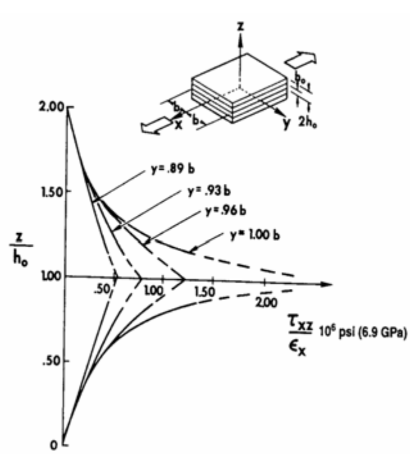
Le tensioni ai bordi liberi

$$
\begin{aligned}
C'_{66}U_{,yy}+C'_{55}U_{,zz}+C'_{26}V_{,yy}+C'_{45}V_{,zz}+(C'_{36}+C'_{45})W_{,yz}&=0,\\
C'_{26}U_{,yy}+C'_{45}U_{,zz}+C'_{22}V_{,yy}+C'_{44}V_{,zz}+(C'_{23}+C'_{44})W_{,yz}&=0,\\
(C'_{36}+C'_{45})U_{,yz}+(C'_{23}+C'_{44})V_{,yz}+C'_{44}W_{,yy}+C'_{33}W_{,zz}&=0.
\end{aligned}
$$

- Queste equazioni devono essere risolte per via numerica, dopo aver precisato le idonee condizioni ai bordi.
- Jones presenta i risultati di questa analisi su una piastra in cui b=8h_0 e il materiale è un carbonio-epoxy.
- In particolare, si osserva, figura seguente (tratta dal Jones, come le successive), che la presenza delle tensioni di taglio interlaminari si concentra in una zona a ridosso del bordo libero, e di estensione all'incirca uguale allo spessore totale del laminato.
- Il fenomeno è quello di un comportamento di tipo strato limite: in una zona a ridosso di una superficie singolare, in questo caso il bordo, si manifestano dei fenomeni che alterano l'andamento regolare delle varie grandezze.

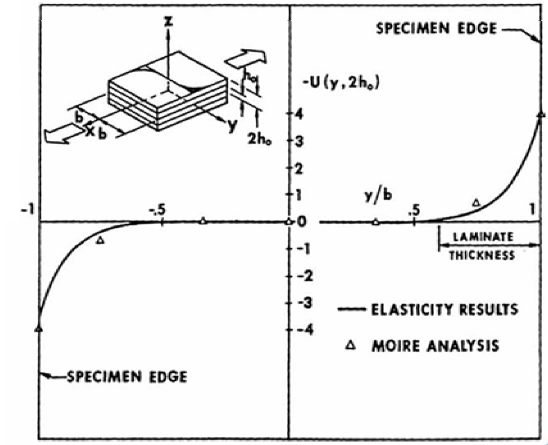
Le tensioni ai bordi liberi





Le tensioni ai bordi liberi

- La seconda figura a pagina precedente mostra la variazione delle tensioni di taglio sullo spessore.
- Si nota che queste crescono tendendo verso l'interfaccia tra i due strati, che sembra essere una superficie di singolarità per le tensioni di taglio.
- La figura a lato mostra invece lo spostamento longitudinale, $u(y, z)$, in superficie in funzione dell'ascissa y.
- Come si nota, anche qui l'effetto di bordo altera sensibilmente il regolare andamento dello spostamento.



Le tensioni ai bordi liberi

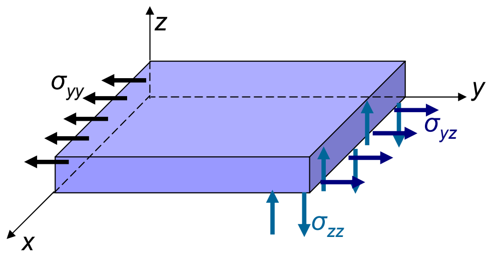
- Il semplice modello analizzato non deve però trarre in inganno: esso permette di mettere in evidenza l'esistenza delle tensioni interlaminari di tipo σ_{xz}, ma anche le tensioni di tipo σ_{yz} e σ_{zz} possono esistere, per lo stesso tipo di carico, provocate da una diversa sequenza di laminazione, o a causa di altri tipi di carico.
- Ad esempio, se i due strati esterni sono a 90° e quelli centrali a 0°, allora si mette in evidenza l'esistenza di una tensione di tipo σ_{yy} sullo spessore degli strati pari a

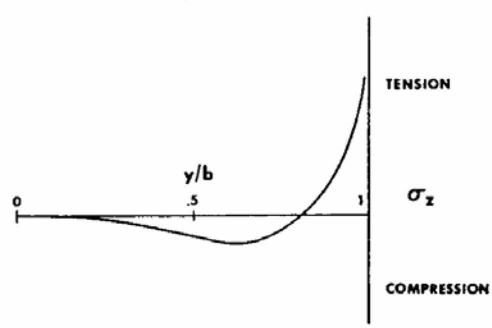
$$\sigma_{yy} = -\frac{N_x}{2h_0}\frac{(Q_{11}-Q_{22})Q_{12}}{(Q_{11}+Q_{22})^2-4Q_{12}^2}.$$

- Ora, se si isola una porzione di strato come nella figura alla pagina seguente, si osserva che per l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse x devono sussistere delle tensioni normali σ_{zz}, la cui distribuzione deve essere evidentemente equilibrata.

Le tensioni ai bordi liberi

- Una distribuzione plausibile delle tensioni σ_{zz} per questo caso è stata proposta da Pipes e Pagano, vedi figura (Jones).
- Si vede che essa tende a zero al di fuori dello strato limite adiacente al bordo e di estensione uguale allo spessore della piastra, mentre in prossimità del bordo tende verso infinito.
- Queste tensioni sono quindi in grado di provocare la delaminazione al bordo per distacco delle parti, in teoria anche per deboli valori delle forze applicate.



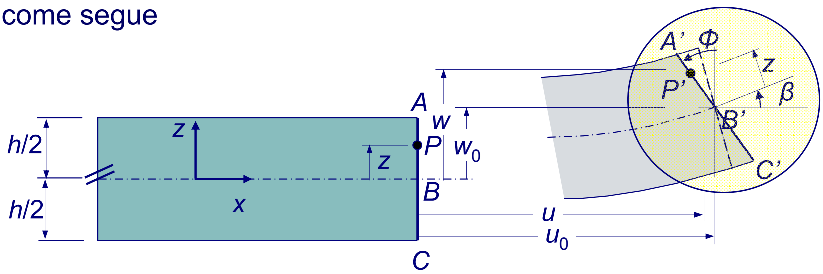


La teoria di Reissner-Mindlin

- Si è già detto che i problemi principali della teoria classica derivano dallo stesso modello cinematico.
- In particolare, delle tre ipotesi del modello di Kirchhoff riguardanti la cinematica del segmento normale al piano medio, quella che pone i problemi principali è quella che prevede che tale normale resti ancora perpendicolare alla superficie media deformata.
- Appare quindi inevitabile rimuovere questa ipotesi, al fine di mettere in evidenza l'esistenza di deformazioni da taglio nello spessore della piastra ed in seguito poterne dedurre le corrispondenti tensioni.
- Nel modello che segue le altre ipotesi sul comportamento del segmento normale rimangono.
- In particolare, esso resta piano e non subisce deformazioni estensionali.
- Queste due ipotesi sono ben rispettate nella realtà, tranne che nei casi di piastre molto spesse. Il modello che andiamo a vedere si presta quindi ragionevolmente bene per l'analisi di piastre moderatamente spesse.

La teoria di Reissner-Mindlin

- Il modello meccanico classico, pagina 292 viene quindi modificato come segue



- La rotazione della normale non è più uguale all'angolo β che la tangente al piano medio forma con l'orizzontale, ma è un angolo indipendente da questo, Φ.
- Si deve subito dire che l'ipotesi classica vincolava la deformazione ad una condizione molto forte, che aveva come conseguenza fondamentale quella di eliminare la deformazione a taglio e gli

La teoria di Reissner-Mindlin

spostamenti che ne conseguono, e quindi globalmente di sovrastimare l'effettiva rigidezza della piastra.

- Circa la rotazione Φ, si fa l'ipotesi che questa resti di piccola entità, in modo tale che

$$\sin\Phi \cong \tan\Phi \cong \Phi, \quad \cos\Phi \cong 1.$$

- Ne consegue che

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\,\Phi_x(x,y),$$
$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\,\Phi_y(x,y),$$
$$w(x,y) = w_0(x,y) \quad \forall z.$$

- Le incognite cinematiche sono adesso, oltre a u_0, v_0 e w_0, anche le rotazioni Φ_x e Φ_y; queste sono tutte funzioni di x ed y, e quindi ci si può ancora ridurre ad un modello bidimensionale.
- Se adesso si calcolano le deformazioni, si ottiene

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

La teoria di Reissner-Mindlin

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} - z\frac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x}\right] - \frac{z}{2}\left[\frac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial x}\right],$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x}\right] = \frac{1}{2}\left[-\Phi_x(x,y) + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}\right],$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - z\frac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\left[-\Phi_y(x,y) + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}\right],$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial z} = 0.$$

La teoria di Reissner-Mindlin

- Dunque, adesso le deformazioni ε_{xz} ed ε_{yz} non sono nulle, ma assumono un valore costante sullo spessore.
- Questo costituisce un difetto del modello, in quanto se si calcolano le tensioni corrispondenti tramite la legge costitutiva, queste assumono un valore costante, se il materiale è almeno ortotropo con l'asse z asse di ortotropia, mentre invece sappiamo che queste tensioni non possono essere costanti, e che si annullano obbligatoriamente sulle superfici della piastra se questa non è soggetta a carichi distribuiti radenti.
- Il campo di deformazioni nel piano viene ancora scritto come somma di due parti, una dovuta alle deformazioni del piano medio ed una dovuta alle curvature del piano medio:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_s\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x^o\\ \varepsilon_y^o\\ \varepsilon_s^o\end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_s\end{Bmatrix}.$$

La teoria di Reissner-Mindlin

- Rispetto alla teoria classica, è però la definizione delle curvature che cambia, in quanto non sono più direttamente legate allo spostamento w_0:

$$\begin{Bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_s\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial y}+\dfrac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial x}\end{Bmatrix}.$$

- Se adesso si introducono le risultanti della azioni interne, definite a pagina 310 per le azioni di membrana ed i momenti flettenti e torcenti, e a pagina 450 per le azioni di taglio, si nota innanzitutto che niente cambia per il calcolo dei tensori **A**, **B** e **D**: *il comportamento elastico nel piano non è modificato dal cambiamento di modello.*

La teoria di Reissner-Mindlin

- D'altra parte, in caso contrario, la definizione delle simmetrie elastiche di un laminato dipenderebbe, paradossalmente, dalla teoria di piastra utilizzata.
- Il modello cinematico invece cambia la definizione di curvatura ed introduce nuove variabili cinematiche.
- Per quanto concerne le risultanti di taglio, il loro calcolo presuppone dapprima il calcolo delle tensioni di taglio σ_{zx} e σ_{zy}.
- Per un materiale ortotropo in cui l'asse z è asse d'ortotropia, la matrice di rigidezza [C] è quella di pagina 509, per cui si ha che

$$\begin{Bmatrix}\sigma'_4\\ \sigma'_5\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C'_{44} & C'_{45}\\ C'_{45} & C'_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon'_4\\ \varepsilon'_5\end{Bmatrix}.$$

- Se si è nel riferimento di ortotropia, allora $C_{44}=G_{23}$ e $C_{55}=G_{13}$. Se il materiale è isotropo trasverso nel piano 23, come è il caso di una lamina unidirezionale con le fibre in direzione x_1, allora $C_{55}= C_{66}$ e dunque $G_{13}=G_{12}$.

La teoria di Reissner-Mindlin

- Una avvertenza: come nel caso tridimensionale, si sono indicate con l'apice le grandezze tensoriali in un riferimento che non è quello di ortotropia.
- Per le componenti piane, seguendo la consuetudine, si era scelto di utilizzare in tal caso i simboli *x*, *y* ed *s* al posto di 1, 2 e 5.
- Purtroppo, nel caso tridimensionale non vi è, per la notazione di Voigt, una convenzione analoga per gli indici 3, 4 e 5, e dunque si è scelto di utilizzare i simboli numerici con l'apice a indicare il fatto che non si è, in generale, nel riferimento di ortotropia del materiale.
- In particolare, nel caso di un laminato, con l'apice si indicano le grandezze nel riferimento globale della piastra.
- In definitiva, la corrispondeza tra componenti con indici letterali e componenti con indici numerici ed apici è la seguente:

$$\begin{Bmatrix}\sigma'_4\\ \sigma'_5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_{zy}\\ \sigma_{zx}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\varepsilon'_4\\ \varepsilon'_5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\varepsilon_{zy}\\ 2\varepsilon_{zx}\end{Bmatrix}.$$

La teoria di Reissner-Mindlin

- Le relazioni costitutive precedenti mostrano un paradosso di questa teoria, già in parte accennato: le tensioni di taglio sono costanti nello spessore di ogni strato, non si annullano sulle facce della piastra e non vi è continuità delle tensioni di taglio all'interfaccia degli strati, in quanto in generale

$$\begin{bmatrix}C'_{44} & C'_{45}\\ C'_{45} & C'_{55}\end{bmatrix}_k \neq \begin{bmatrix}C'_{44} & C'_{45}\\ C'_{45} & C'_{55}\end{bmatrix}_{k+1}.$$

- Se invece si integrano le equazioni indefinite di equilibrio, dopo aver preso in conto il legame costitutivo e l'espressione delle deformazioni in funzione delle incognite cinematiche, pagina 519, si ottiene, come anche nel caso della teoria classica, una variazione parabolica delle tensioni di taglio sullo spessore.
- Per prendere in conto tutto ciò, nella teoria di Reissner-Mindlin, detta anche teoria FSDT (*First-order Shear Deformation Theory*) si introduce una *funzione di ponderazione* *f*(*z*) continua sullo spessore:

La teoria di Reissner-Mindlin

$$f(z)=\frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right].$$

- Questa funzione, il cui integrale sullo spessore vale 5/6 *h*, e quindi introduce un fattore di riduzione di 5/6 nel calcolo delle risultanti di taglio, permette di ottenere una variazione parabolica delle tensioni di taglio sullo spessore e al contempo di rispettare le condizioni di annullamento delle stesse in corrispondenza delle facce esterne, ma non assicura comunque la continuità delle tensioni di taglio alle interfacce degli strati.

- Il calcolo delle risultanti di taglio tenendo conto della funzione di ponderazione e del legame costitutivo è dunque il seguente:

La teoria di Reissner-Mindlin

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{5}{4}\sum_{k=1}^{n}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[1-\left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right](C'_{44}\varepsilon'_4+C'_{45}\varepsilon'_5)dz \\ \frac{5}{4}\sum_{k=1}^{n}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[1-\left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right](C'_{45}\varepsilon'_4+C'_{55}\varepsilon'_5)dz \end{Bmatrix}.$$

- I coefficienti elastici sono costanti strato per strato mentre le deformazioni sono costanti su tutto lo spessore; si ottiene dunque

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} H'_{44} & H'_{45} \\ H'_{45} & H'_{55} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \end{Bmatrix},$$

dove i *coefficienti di rigidezza a taglio* H_{ij} sono dati da

$$H'_{ij}=\frac{5}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[z_k-z_{k-1}-\frac{4}{3}\frac{z_k^3-z_{k-1}^3}{h^2}\right](C'_{ij})_k,\quad i,j=4,5.$$

La teoria di Reissner-Mindlin

- Nel caso di laminati a strati identici, allora l'espressione precedente si semplifica:

$$H'_{ij}=\frac{5}{12}\frac{h}{n^3}\sum_{k=1}^{n}C'_{ij}\left(3n^2-d_k\right),\quad i,j=4,5,$$

dove i coefficienti d_k sono già stati definiti a pagina 351,

$$d_k=12k(k-n-1)+4+3n(n+2).$$

- Sono note alcune soluzioni basate sul metodo di Navier per le piastre simmetriche, rettangolari, appoggiate sui bordi e con gli assi di ortotropia in flessione paralleli ai lati (*e.g.* Whitney, 1972, vedi Jones).

Teorie di ordine superiore per i laminati

- La teoria di Reissner-Mindlin è migliore della teoria classica, sia perché fornisce dei risultati migliori per quanto riguarda gli spostamenti trasversali, maggiori perché la piastra è più deformabile, sia perché permette di calcolare le tensioni di taglio.
- Tuttavia, non è ancora soddisfacente per diversi aspetti; ad esempio, non assicura la continuità delle tensioni di taglio alle interfacce degli strati e non permette il calcolo delle tensioni di tipo σ_{zz}, che abbiamo visto essere importanti per i fenomeni di delaminazione ai bordi liberi.
- Inoltre, anche la valutazione dello spostamento trasversale w_0, anche se migliore rispetto alla teoria classica, non possiede ancora una sufficiente precisione.
- Per queste ragioni sono state proposte negli anni un gran numero di teorie di ordine superiore per la modellazione dei laminati.
- Non è il caso in questa sede di approfondire questo tipo di argomenti, molto specialistici.

Teorie di ordine superiore per i laminati

- Tuttavia, si vuole qui dare solo una rapidissima panoramica dello stato dell'arte in materia di teorie per i laminati.
- In linea generale, le teorie per i laminati si dividono in:
  - teorie monostrato equivalente (ESL: *equivalent single layer*); sia la teoria classica che la teoria di Reissner-Mindlin rientrano in questa categoria;
  - teorie strato per strato (LW: *layer-wise theory*).
- Appartengono alla prima categoria tutte quelle teorie in cui si cerca di ridurre il comportamento del laminato a quello di un monostrato equivalente.
- Esse sono caratterizzate dal fatto che il numero delle variabili cinematiche non dipende da quello degli strati.
- Appartengono alla seconda categoria le teorie in cui la descrizione degli spostamenti in ogni singolo strato è fatta con funzioni proprie allo strato ed indipendenti da quelle degli altri strati.

Teorie di ordine superiore per i laminati

- Per il fatto di usare un campo di spostamenti definito strato per strato, queste teorie sono in genere più precise delle altre; sono tuttavia più pesanti dal punto di vista computazionale.
- Le condizioni di continuità alle interfacce possono essere imposte agevolmente nelle teorie del secondo tipo.
- Nel campo delle teorie ESL, si ricordano soltanto la teoria TSDT (*Third-order Shear Deformation Theory*), Reddy, 1983, in cui la normale al piano medio ruota e si ingobba secondo una cubica in z, in modo da ottenere una variazione parabolica delle deformazioni, e quindi delle tensioni, sullo spessore, e le teorie di tipo Zig-Zag (Di Sciuva, 1984, Murakami, 1986), in cui il campo di spostamenti negli strati è differente ma si assicura la loro continuità alle interfacce.
- Un'altra distinzione che viene spesso fatta è quella relativa alla formulazione di una teoria.

Teorie di ordine superiore per i laminati

- Generalmente, si distingue in teorie che si basano su una formulazione negli spostamenti e che quindi utilizzano un principio variazionale di tipo principio dei lavori virtuali, oppure che utilizzano un approccio misto, dove si definiscono come campi indipendenti alcune componenti di spostamento e di tensione; in tal caso, si fa ricorso al principio di Hellinger-Reissner per la formulazione variazionale del problema.
- Una estesa discussione delle possibili teorie si può trovare in letteratura in alcuni lavori di Reddy e di Carrera, ai quali si rimanda.
- A titolo di esempio, si riporta una tabella tratta da un articolo di Carrera e Ciuffreda (*A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems*, Composite Structures, 69, 2005).
- Sono confrontati i valori della freccia massima per due laminati *cross-ply* quadrati a 3 e 4 strati, il secondo antisimmetrico (e accoppiato).

Teorie di ordine superiore per i laminati

- I valori in questione sono calcolati con 38 teorie differenti, partendo dalla teoria classica, in basso (CLT, *Classical Lamination Theory*), fino alla soluzione esatta in elasticità tridimensionale (vedi oltre, soluzione di Pagano).
- I risultati sono forniti per due valori del rapporto lato/spessore, *a/h*= 4 e 6.
- Si nota che la teoria classica sottostima in maniera inaccettabile lo spostamento, mentre la teoria tipo FSDT, anche se non ancora soddisfacente, dà una stima comunque largamente migliore.
- Questo mostra che la teoria classica sovrastima in modo eccessivo la rigidezza.

	$a/h = 4$		$a/h = 6$	
	$N_l = 3$	$N_l = 4$	$N_l = 3$	$N_l = 4$
3D[23]	2.887	4.181	1.635	2.556
LM4	2.887	4.181	1.625	2.556
LM3	2.887	4.181	1.635	2.556
LM2	2.891	4.181	1.635	2.556
LM1	3.539	4.710	1.880	2.803
EMZC3	2.881	4.102	1.634	2.514
EMZC2	2.831	3.478	1.602	2.195
EMZC1	2.904	3.300	1.634	2.095
EMZC3d	2.898	4.124	1.637	2.516
EMZC2d	2.848	3.488	1.602	2.195
EMZC1d	2.904	3.306	1.634	2.098
EMC4	2.721	3.885	1.534	2.391
EMC3	2.744	3.696	1.543	2.285
EMC2	2.244	3.158	1.284	2.031
EMC1	3.515	3.681	1.844	2.257
EMC3d	2.717	3.869	1.529	2.381
EMC2d	2.744	3.660	1.542	2.268
EMC1d	2.109	3.029	1.225	1.972
EMC1d	2.196	3.142	1.258	2.014
LD4	2.887	4.180	1.634	2.556
LD3	2.887	4.180	1.634	2.556
LD2	2.864	4.165	1.629	2.553
LD1	2.783	4.058	1.583	2.495
EDZ3	2.876	4.089	1.633	2.506
EDZ2	2.781	3.377	1.583	2.150
EDZ1	2.798	3.170	1.586	2.037
EDZ3d	2.893	4.110	1.636	2.507
EDZ2d	2.798	3.392	1.586	2.149
EDZ1d	2.798	3.177	1.586	2.040
ED4	2.684	3.830	1.514	2.361
ED3	2.687	3.595	1.514	2.238
ED2	2.074	2.984	1.219	1.952
ED1	2.091	2.924	1.209	1.917
ED4d	2.703	3.842	1.517	2.361
ED3d	2.703	3.606	1.517	2.238
ED2d	2.090	2.988	1.211	1.950
FSDT	2.091	2.924	1.211	1.919
CLT	0.5075	1.115	0.5075	1.115

La teoria di Verchery-Pham Dang per i sandwich

- I pannelli sandwich sono caratterizzati dal fatto che mentre le due pelli, cioè gli strati esterni, sono in genere rigidi e molto sottili, lo strato centrale, l'anima, è spesso e poco rigido.
- In una tale situazione è ancor più necessario disporre di una buona teoria, che prenda in debito conto le deformazioni di taglio.
- Esistono diverse teorie *ad-hoc* per le piastre sandwich (a tale scopo si rimanda al testo in bibliografia edito da A. Vautrin).
- Qui si vuole succintamente parlare della teoria di Verchery-Pham Dang (1976), che è una delle prime teorie miste per le piastre e che conduce ad una soluzione esatta, utilizzando l'approccio di Navier, per le piastre rettangolari appoggiate sul contorno, ortotrope e con assi di ortotropia paralleli ai lati.
- Senza entrare nei dettagli, nel modello di Verchery et Pham Dang, le variabili indipendenti sono gli spostamenti nel piano e le tensioni σ_{i3}, i=1,2.
- La tensione σ_{33} si ottiene dalle equazioni di equilibrio.

La teoria di Verchery-Pham Dang per i sandwich

- Il campo di spostamenti assunto è continuo alle interfacce, costante nelle pelli e linearmente variabile nell'anima. Una tale assunzione è giustificata dal piccolo spessore delle pelli.
- Si assume poi che l'anima lavori solo a taglio e si assegnano le variazioni delle tensioni da taglio.
- Queste possono essere di due tipi: costanti nell'anima e lineari nelle pelli, oppure constanti nell'anima e quadratiche nelle pelli.
- Con questa teoria si possono prendere in conto sia la continuità degli spostamenti che quello delle tensioni di taglio e di σ_{33} alle interfacce.
- Le equazioni di equilibrio e le condizioni al bordo associate sono recuperate con una formulazione variazionale mista.
- Per maggiori dettagli, si rinvia all'articolo: *Pham Dang, T., Verchery, G.: Théorie des plaques sandwich assurant la continuité du déplacement et de la contrainte aux interfaces. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris, 2 A, 1976.*

La teoria tridimensionale di Pagano

- Per terminare questo capitolo, si fa solo un cenno alla teoria elaborata nel 1969 da N. J. Pagano in un celebre articolo: *Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates* (Journal of Composite Materials, 4, 1970).
- L'importanza di questa teoria risiede nel fatto che essa è una soluzione esatta tridimensionale in teoria lineare dell'elasticità.
- Essa riguarda il calcolo di piastre laminate e sandwich, ma è applicabile anche alle piastre con un singolo strato, e non ha restrizioni sullo spessore.
- Ogni strato della piastra deve essere ortotropo e avere gli assi di ortotropia paralleli ai lati; la restrizione usuale, già più volte commentata, è quindi ancora più forte in questo caso, perché riguarda non solo l'intera piastra ma ciascuno strato.
- La soluzione è trovata con un procedimento che fa uso di autofunzioni di tipo esponenziale e trigonometrico, e si deve

La teoria tridimensionale di Pagano

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

risolvere un sistema di equazioni diverso per ciascuna armonica in cui un carico ortogonale è decomposto, il che puo' comportare delle complicazioni numeriche.

- Tuttavia, la soluzione di Pagano è molto utilizzata come soluzione di riferimento, in quanto nell'ambito dell'elasticità lineare è esatta ed è una soluzione tridimensionale, nella quale cioè non si fanno ipotesi cinematiche sul comportamento della piastra.
- Un punto discusso della soluzione di Pagano è semmai quello delle condizioni al contorno, che traducono la condizione bidimensionale di appoggio.